Rövid válaszok – 2005. június 1.

(1b) Igaz. A $g-2f$ polinomnak végtelen sok gyöke van $\mathbf{Q}$-ban, ezért $g-2f=0$, vagyis $g=2f$.

(1c) Igen, léteznek. Legyen például
$f_2 = x^3+1+x^{59}(x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6))$, $f_1 = x^3+1$, ekkor $\deg f_1 = 3$, $\deg f_2 = 59+7 = 66$, és (f_2-f_1)-nek a $\mathbf{Z}_7$ minden eleme gyöke lévén (f_2-f_1)-hez az azonosan nulla polinomfüggvény tartozik.

(2b) Igen, például x^3+x+1 (együtthatói 0^3 és 1^3) irreducibilis $\mathbf{Q}$ felett, mivel harmadfokú és nincs racionális gyöke (racionális gyöke ui. csak ± 1 lehetne a racionális gyökteszt miatt, de láthatóan ezek egyike sem gyök).

(2c) Igen. Mivel $\mathbf{Q}$ test, létezik $g \in \mathbf{Q}[x]$, hogy $f=(x-3)g$. Legyen $g=ch$, ahol $c \in \mathbf{Q}$, $h \in \mathbf{Z}[x]$ és h primitív. Ekkor $f = c(x-3)h$, és a Gauss-lemma szerint $(x-3)h$ is primitív. Ezért c egész, tehát $g = ch \in \mathbf{Z}[x]$. Vagy: f-et a Horner-elrendezés segítségével maradékosan osztva $(x-3)$-mal tapasztaljuk, hogy a hányados mindegyik együtthatója egész, hiszen egész számokból (f együtthatóiból és a 3-ból) kiindulva csak összeadásokat és szorzásokat kell végeznünk.

(3b) Például $x_1+x_2+x_3=1,\ x_1+x_2+x_3=1,\ x_1=0,\ x_1=0$ megoldása: $x_1=0$, $x_2=x_3+1$, ahol az egyetlen szabad paraméter x_3, ami kétféle értéket vehet fel. Tehát a két megoldás: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=1$, ill. $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$.

(4b) Például

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

(4c) $\mathbf{R}^n$ minden bázisa n-elemű, minden független rendszer kiegészíthető bázissá (így legfeljebb n-elemű) és minden véges generátorrendszer tartalmaz bázist (ezért legalább n-elemű). Tehát $20 \le n \le 21$. Az $n=20$-ra példa lehet az, ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_{20}$ az $\mathbf{R}^{20}$ standard bázisa, $\underline{a}_{21}$ pedig tetszőleges, $n=21$-re példa, ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_{20}, \underline{a}_{21}$ az $\mathbf{R}^{21}$ standard bázisa.

(5a) Az egyetlen ilyen mátrix $S = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$.

(5b) Ha pl. $A = \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$, akkor minden $\underline{b} = \begin{bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\end{bmatrix}$ esetén $x_1=\beta_1$, $x_2=\beta_2$, $x_3=\beta_3$, $x_4=$akármi biztosan megoldás.

(5c) Nincs, mivel $\underline{c} := \underline{0} \in \mathbf{R}^3$ választással $\underline{x} := \underline{0} \in \mathbf{R}^4$ biztosan megoldás.