I. mat. tanári szak, 2005. tavasz

Algebra és számelmélet

1. vizsga: 2005. június 1.

A kérdésekre adott valamennyi válaszát indokolja (indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont). Ha felhasznál egy-egy az előadáson vagy gyakorlaton szerepelt tételt, pontosan fogalmazza azt meg, és világosan mutasson rá, milyen szereposztásban következik belőle a kívánt állítás ill. annak valamely része. Kérjük, hogy mindegyik kérdéscsoportra adandó válaszait külön lapra írja, és a lapokat a kérdéscsoportok sorszáma szerint növekvő sorrendbe rendezve adja be. Mindegyik lapra írja rá a nevét, az első lapra pedig a gyakorlatvezetőjének a nevét is. A dolgozat megírására fordítható munkaidő 180 perc. Az elérhető legnagyobb összpontszám 50 pont.

Várható osztályzás: [40-50]: $\boxed{5}$, [33-39]: $\boxed{4}$, [26-32]: $\boxed{3}$, [20-25]: $\boxed{2}$, [0-19]: $\boxed{1}$

1. (a) Fogalmazza meg, mi a „Casus Irreducibilis”. Bizonyítania nem kell. (2 pont)

   (b) Legyen $f, g \in \mathbf{Q}[x]$, és tegyük fel, hogy minden pozitív n egészre $2f(n) = g(n)$. Igaz-e, hogy ekkor $f \mid g$? (3 pont)

   (c) Léteznek-e olyan $f_1, f_2 \in \mathbf{Z}_7[x]$ polinomok, amelyekre $\deg f_1 = 3$, $\deg f_2 = 66$, és e két polinomhoz ugyanaz a polinomfüggvény tartozik? (4 pont)

2. (a) Fogalmazza meg a Schönemann–Eisenstein-féle kritériumot. Mondja ki és bizonyítsa is be az erről szóló tételt. A bizonyítás során a megfelelő helyen fogalmazza meg pontosan a felhasznált segédtétel(eke)t is, ez(eke)t azonban nem kell bizonyítania. (7 pont)

   (b) Létezik-e olyan legalább harmadfokú $f \in \mathbf{Z}[x]$ polinom, amely irreducibilis $\mathbf{Q}$ fölött, és minden együtthatója köbszám? (*köbszám: egy egész szám köbe*) (3 pont)

   (c) Tegyük fel, hogy $f \in \mathbf{Z}[x]$, és $f(3) = 0$. Létezik-e olyan **egész együtthatós** g polinom, amelyre $f = (x - 3)g$? (3 pont)

LEGYEN SZÍVES, FORDÍTSON!

3. (a) Miyen kapcsolat van egy homogén lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek, az egyenletek és a megoldások száma között? Fogalmazza meg és bizonyítsa be a megfelelő tételt. (5 pont)

   (b) Adjon meg olyan lineáris egyenletrendszert a kételemű $\mathbf{Z_2}$ testben, ami négy egyenletből áll, három ismeretlent tartalmaz, és a megoldásainak száma kettő. (3 pont)

4. (a) Határozza meg (T^n-ben) a függetlenség, a generátorrendszer és a bázis fogalmát. (3 pont)

   (b) Adjon meg egy háromelemű független rendszert $\mathbf{R}^5$-ben. (2 pont)

   (c) Tegyük fel, hogy $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{20}, \underline{a}_{21}$ generátorrendszer, $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{20}$ pedig lineárisan független rendszer $\mathbf{R}^n$-ben. Határozza meg n lehetséges értékeit. Minden lehetségesnek tartott értékre adjon egy-egy konkrét példát is. (4 pont)

5. (a) Írjon fel egy olyan $\mathbf{R}^{4\times4}$-beli S mátrixot, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal: minden $\mathbf{R}^{4\times4}$-beli M mátrixra az MS mátrix első oszlopa egyenlő az M második oszlopával, az MS második oszlopa egyenlő az M harmadik oszlopával, az MS harmadik oszlopa egyenlő az M negyedik oszlopával, az MS negyedik oszlopa pedig egyenlő az M valamennyi oszlopának az összegével. (2 pont)

   (b) Adjon meg olyan $A \in \mathbf{R}^{3\times4}$ mátrixot, amelyre az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletnek bármely $\underline{b} \in \mathbf{R}^3$ esetén létezik ($\underline{x} \in \mathbf{R}^4$) megoldása. (3 pont)

   (c) Van-e olyan $B \in \mathbf{R}^{3\times4}$ mátrix, amelyre a $B\underline{x} = \underline{c}$ egyenletnek semmilyen $\underline{c} \in \mathbf{R}^3$ esetén nem létezik ($\underline{x} \in \mathbf{R}^4$) megoldása? (2 pont)

   (d) Definiálja egy négyzetes mátrix determinánsát, és mondja ki a kifejtés és a ferde kifejtés tételét. Határozza meg a tételekben szereplő fogalmakat. Bizonyítania nem kell. (4 pont)