

1. vizsga: 2006. január 4.

A kérdésekre adott valamennyi válaszát indokolja (indoklás nélküli eredményközlésért nem jár pont). Ha felhasznál egy-egy az előadáson vagy gyakorlaton szerepelt tételt, pontosan fogalmazza azt meg, és világosan mutasson rá, milyen szereposztásban következik belőle a kívánt állítás ill. annak valamely része. *Kérjük, hogy mindegyik kérdéscsoportra adandó válaszait külön lapra írja, és a lapokat a kérdéscsoportok sorszáma szerint növekvő sorrendbe rendezve adja be. Mindegyik lapra írja rá a nevét, az első lapra pedig az e-mail címét is.* A dolgozat megírására fordítható munkaidő 130 perc. Az elérhető legnagyobb összpontszám 50 pont.

Várható osztályzás: [40-50]: 5 , [33-39]: 4 , [26-32]: 3 , [20-25]: 2 , [0-19]: 1

1. (a) Definiálja a lineáris leképezés és a lineáris transzformáció mátrixának a fogalmát. Injektív-e az a lineáris leképezés, aminek a mátrixa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix} ? \quad (5 \text{ pont})$$

- (b) Hogyan változik meg egy vektor koordináta-mátrixa, ha azt egy újabb bázis szerint írjuk fel? Fogalmazza meg és bizonyítsa is be az erről szóló tételt. A bizonyításhoz először definiálnia is kell a vektor koordináta-mátrixának fogalmát. (6 pont)

2. (a) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a lineáris leképezésekre vonatkozó dimenziótételt. A bizonyításhoz szükséges állítás(oka)t is pontosan mondja ki, de ez(eke)t nem kell bizonyítania. (6 pont)

- (b) \mathbf{R}^4 egy lineáris transzformációja az egyik bázis mindegyik elemét a báziselemek összegébe képezi. Mi lehet a transzformáció magterének dimenziója? (3 pont)

- (c) Van-e \mathbf{R}^4 -nek olyan lineáris transzformációja, amelynek a megtere és a képtere ugyanaz? (5 pont)

LEGYEN SZÍVES, FORDÍTSON!

3. (a) Definiálja a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomjának a fogalmát, és mondjon ki egy, a karakterisztikus polinomról szóló tételt. (Bizonyítania nem kell.) (3 pont)
- (b) Van-e \mathbf{R}^2 -nek olyan nem diagonalizálható lineáris transzformációja, amelynek a karakterisztikus polinomja $(x + 1)^2$? (5 pont)
- (c) Van-e \mathbf{R}^4 -nek olyan lineáris transzformációja, amelynek a karakterisztikus polinomja $(x + 1)^3(x + 3)$, a minimálpolinomja pedig $x + 3$? (4 pont)
4. (a) Csoportot alkotnak-e a 3-tól különböző valós számok az $x \circ y \stackrel{\text{def.}}{=} xy - 3x - 3y + 12$ műveletre? (5 pont)
- (b) Hány másodrendű elem van a D_{50} diédercsoportban? (4 pont)
- (c) A 90 elemű G csoport c eleméről tudjuk, hogy c, c^2, \dots, c^{46} páronként különbözők. Igazolja, hogy G ciklikus. (4 pont)