Rövid válaszok – 2006. január 4.

(1a) A mátrix második oszlopa az elsőnek 3/2-szerese, ezért pl. az első vektortér első báziselemének 3-szorosa ugyanoda képződik, mint a második báziselem 2-szerese; a leképezés tehát nem injektív. Másképpen: a mátrix rangja 1, így a képtér 1-dimenziós. A megtér dimenziója a dimenziótétel szerint $2 - 1 = 1$, emiatt a leképezés nem injektív.

(2b) Mindegyik báziselem képe ugyanaz a nemnulla vektor, ezért a képtér 1-dimenziós. A magtér dimenziója a dimenziótétel szerint $4 - 1 = 3$.

(2c) Igen, van. Jelölje $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ az $\mathbf{R}^4$ tetszőleges bázisát, és legyen f az a lineáris transzformáció, amelyre $f(\underline{e}_1) = \underline{e}_3, f(\underline{e}_2) = \underline{e}_4, f(\underline{e}_3) = \underline{0}, f(\underline{e}_4) = \underline{0}$. A képtér a báziselemek képei által generált altér, azaz $\mathrm{Im}f = \langle \underline{e}_3, \underline{e}_4, \underline{0}, \underline{0}\rangle = \langle \underline{e}_3, \underline{e}_4\rangle$, ami 2-dimenziós. A dimenziótétel miatt így $\ker f$ dimenziója is 2, másrészt az f megadásából látszik, hogy $\underline{e}_3, \underline{e}_4 \in \ker f$, tehát valóban $\ker f = \langle \underline{e}_3, \underline{e}_4\rangle = \mathrm{Im} f$.

(3b) Van. Olyen pl. az a transzformáció, aminek (pl. az $\mathbf{R}^2$ standard bázisára vonatkozó) mátrixa $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 222 & -1 \end{pmatrix}$. A karakterisztikus polinom: $\det\begin{pmatrix} -1-x & 0 \\ 222 & -1-x \end{pmatrix} = (-1-x)^2 = (x+1)^2$, így az egyetlen sajátértéke a -1. Az ehhez tartozó sajátvektorok megkeresésével adódik, hogy a megfelelő sajátaltér (csupán) egydimenziós, ezért a transzformáció valóban nem diagonalizálható. Másképpen: Mivel a -1 az egyetlen sajátérték, azért: ha a transzformáció diagonalizáható lenne, akkor létezne olyan 2×2-es invertálható (valós elemű) M mátrix, amelyre $M^-1 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 222 & -1 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát balról M-mel: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 222 & -1 \end{pmatrix} M = M \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -M$, itt pedig mindkét oldalt jobbról megszorozva M^{-1}-gyel: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 222 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, ellentmondás.

(3c) Nincs. Ha f ilyen transzformáció lenne, akkor $0 = (x+3)[f] = f + 3 \cdot \mathrm{Id}$ szerint f az identikus transzformáció (-3)-szorosa lehetne csak; ebben az esetben viszont egyetlen sajátértéke a -3, ezért a karakterisztikus polinomjának nem lehetne a -1 is gyöke – ellentmondás. Másképpen: hivatkozhatunk arra is, hogy a minimálpolinomnak ugyanazok a gyökei (a transzformáció sajátértékei) mint a karakterisztikus polinomnak, csupán a gyökök multiplicitásában lehet különbség.

(4a) Igen. Ha $x \neq 3$ és $y \neq 3$, akkor $x \circ y \neq 3$; ellenkező esetben ugyanis $xy - 3x - 3y + 12 = 3$-ból $y = (3x-9)/(x-3) = 3$ lenne, ami ellentmondás; tehát $\circ$ valóban művelet a 3-tól különböző valós számok halmazán, és nyilván kommutatív. Asszociativitás: $(x \circ y) \circ z = (xy - 3x - 3y + 12) \circ z = (xy - 3x - 3y + 12)z - 3(xy - 3x - 3y + 12) - 3z + 12 = xyz - 3(xy + xz + yz) + 9(x+y+z) - 24$, hasonlóan $x \circ (y \circ z) = x(y \circ z) - 3x - 3(y \circ z) + 12 = x(yz - 3y - 3z + 12) - 3x - 3(yz - 3y - 3z + 12) + 12 = xyz - 3(xy + xz + yz) + 9(x+y+z) - 24$. Egységelem: minden $x \neq 3$-ra $4 \circ x = x \circ 4 = x \cdot 4 - 3x - 3 \cdot 4 + 12 = x$, azaz létezik egységelem, a 4. Inverz: Minden $x \neq 3$-hoz olyan $x^{-1} \neq 3$ számot keresünk, amelyre $4 = x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = x^{-1}x - 3x^{-1} - 3x + 12$, azaz (felhasználva, hogy $x \neq 3$) $x^{-1} = (3x-8)/(x-3)$; ez értelmes, és 3-tól különböző, hiszen $(3x-8)/(x-3) = (3x-9)/(x-3) + 1/(x-3) = 3 + 1/(x-3) \neq 3$.

(4b) Az 50 darab tengelyes tükrözés mindegyike másodrendű. A ($\frac{360k}{50}$ fokos) forgatások közül csak a 180°-os forgatás másodrendű, és ez eleme a D_{50}-nek (pl. $k := 25$ választással), tehát a válasz: 51.

(4c) A c-nek legalább 46 különböző hatványa van, ezért $o(c) \geq 46 > 90/2$. Másrészt $o(c) \big| |G| = 90$, így csak $o(c) = 90$ lehetséges. Tehát c-nek 90 különböző hatványa van, emiatt G-nek minden eleme c-hatvány, vagyis G ciklikus.