Analízis I. vizsgadolgozat
2006. január 10.

Kérjük ügyeljen arra, hogy válaszait rendezett formában írja le. A feladatokat nem kell külön lapokra írni, de minden feladatra adott válasza legyen összefüggő egység, a többi feladatra adott választól jól elhatároltan. Ügyeljen a pontos megfogalmazásra. Indoklás nélküli válaszokért nem jár pont.

1.

a) Definiálja, mit jelent, hogy egy a_n sorozat határértéke ∞! (2 pt)

b) Bizonyítsa be, hogy $3^n \to \infty$, ha $n \to \infty$! (4 pt)

c) Tegyük föl, hogy az a_n, b_n sorozatok határértéke ∞. Definiálja, mit jelent, hogy az a_n sorozat gyorsabban tart végtelenhez, mint b_n! (2 pt)

d) A következő sorozatok közül melyik tart leggyorsabban végtelenhez? És melyik a leglassabban? Indokolja választását. (4 pt)

$a_n = 10n^2$, $\qquad b_n = 2006+n^3/10n^2$, $\qquad c_n = (n+1)!$

2. Döntse el az alábbi állításokról, hogy igazak vagy hamisak! Ha úgy dönt, hogy egy állítás igaz, adjon rövid bizonyítást! Ha egy állítást hamisnak vél, adjon ellenpéldát!

a) Ha egy $H \subset \mathbf{R}$ halmaz alulról korlátos akkor van legkisebb eleme. (4 pt)

b) Ha egy $H \subset \mathbf{R}$ halmaznak van legkisebb lelem, akkor alulról korlátos. (4 pt)

c) Ha egy $H \subset \mathbf{R}$ halmaznak nincs legkisebb eleme, akkor a $-H = \{-h : h \in H\}$ halmaznak nincs legnagyobb eleme. (4 pt)

d) Ha H = {n.dik gyök n : $n \in \mathbf{N}^+$} akkor infH = 1. (4 pt)

3. Mondja ki a monoton sorozatok határértékéről szóló tételeket. Adjon legalább egy példát ezen tételek alkalmazására. (10 pt)

4.

a) Bizonyítsa be, hogy nincs olyan racionális szám, melynek négyzete 2. (4 pt)

b) Bizonyítsa be, hogy van olyan valós szám, melynek négyzete 2. (8 pt)

Osztályozás: 15-22: elégséges, 23-30: közepes, 31-38: jó, 39-50: jeles.