

Analízis-II vizsgadolgozat

1. rész

Írja a kérdésre adott választ a megfelelő helyre! (Amennyiben szükséges, számoláshoz használja az utolsó oldalt.)

1. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \dots\dots\dots$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \dots\dots\dots$
3. Ha $g(t) = (2t^2 + 1)^{10} \cos 3t$, akkor $g'(t) = \dots\dots\dots$

Írja a következő definíciókat és tételeket a megfelelő helyre! Ügyeljen a pontosságra!

1. Mit jelent, hogy egy f függvény szigorúan monoton csökken az $A \subset \mathbb{R}$ halmazon?
2. Mit jelent, hogy $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$?
3. Mondja ki a Bolzano-Darboux tételt!

Írja le a következő állítások bizonyítását! (A bizonyításokat tetszőleges sorrendben írhatja.)

1. Az $x \mapsto a^x$ függvény gyengén konvex.
2. Az $f(x) = x^n$ függvény deriváltja az $x = a$ pontban: na^{n-1} .
3. Ha f folytonos $[a, b]$ -ben, differenciálható (a, b) -ben és $f'(x) = 0$ minden $x \in (a, b)$ -re, akkor az f függvény konstans $[a, b]$ -ben.

Az elégségeshez minden kérdéscsoportból legalább két helyes válasz kell.

2. rész

1. (4 pt) Az f és g függvényekről tudjuk, hogy

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f'(0) = -2, \quad f'(1) = 3$$

és, hogy

$$g(0) = 0, \quad g(1) = 0, \quad g'(0) = 1, \quad g'(1) = -1.$$

Mi az értéke a következő kifejezéseknek?

- (a) $(fg)'(1)$
(b) $(g/f)'(0)$
(c) $(f \circ f)'(1)$,
(d) $(f \circ g)'(0)$,

2. (16 pt) Döntse el a következő állításokról, hogy igazak, vagy hamisak!

- (a) Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ páros, és $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ létezik, akkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ is létezik.
(b) Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ páratlan, és $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ létezik, akkor $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ is létezik.
(c) Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodikus, és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 10$, akkor f konstans.
(d) Ha $f(0) = g(0)$, és $f'(x) \leq g'(x)$ minden $x \leq 0$ esetén, akkor $f(x) \geq g(x)$, minden $x \leq 0$ esetén.

3. (10 pt) Bizonyítsa be a Bolzano-Darboux tételt!

4. (10 pt) Bizonyítsa be, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$!

5. (10 pt) Definiálja egy függvény grafikonjának ívhosszát, és mondja ki az ívhosszal kapcsolatos tételt! Mutasson alkalmazást ezen tételekre!

4: 25 pt-től, 5: 40 pt-től