ANALÍZIS III. ELŐADÁSJEGYZET

SIKOLYA ESZTER

1. A differenciálszámítás néhány alkalmazása

Emlékeztető:

1.1. Tétel (Rolle-tétel)**.** *Ha az f függvény folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-ben, és $f(a)=f(b)$, akkor létezik olyan $c\in(a,b)$, melyre $f'(c)=0$.*

Bizonyítás. A Weierstrass-tétel közvetlen következménye. □

1.2. Tétel (Lagrange-középértéktétel)**.** *Ha az f függvény folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-ben, akkor létezik olyan $c\in(a,b)$, melyre*

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Bizonyítás. Definiáljuk az alábbi függvényt:

$$F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Erre nyilvánvalóan teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, $F(a)=F(b)=0$, ezért létezik olyan $c\in(a,b)$, melyre

$$F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

□

1.3. Következmény. *Ha az f függvény folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-ben, és $f'(x)=0$ minden $x\in(a,b)$-re, akkor az f függvény konstans $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy létezik $x_1,x_2\in[a,b]$, hogy $f(x_1)\neq f(x_2)$. A Lagrange-középértéktétel feltételei nyilván teljesülnek az $[x_1,x_2]$ intervallumra, tehát létezik olyan $c\in(x_1,x_2)$, melyre

$$f'(c)=0=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Ebből viszont $f(x_1)=f(x_2)$, ami ellentmondás. □

Előzetesként:

1.4. Tétel (Cauchy-középértéktétel)**.** *Ha az f és g függvények folytonosak $[a,b]$-n és differenciálhatók (a,b)-ben, és minden $x\in(a,b)$ esetén $g'(x)\neq 0$, akkor létezik olyan $c\in(a,b)$, melyre*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Date: 2007. január 9..

Bizonyítás. A Rolle-tételből következik, hogy $\Rightarrow g(a) \neq g(b)$. Definiáljuk az alábbi függvényt:

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Erre nyilvánvalóan teljesülnek a Rolle-tétel feltételei, $F(a) = F(b) = 0$, ezért létezik olyan $c \in (a,b)$, melyre

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0.$$

□

1.5. *Megjegyzés.* A Lagrange-középértéktételt a Cauchy-középértéktétel kövekezményeként is bizonyíthattuk volna, hiszen $g(x) = x$-szel adódik.

1.6. Tétel (L'Hospital-szabály)**.** *Legyen f és g differenciálható α egy pontozott környezetében, és tegyük fel, hogy itt $g \neq 0$ és $g' \neq 0$. Tegyük fel továbbá, hogy vagy*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0, \tag{1.1}$$

vagy pedig

$$\lim_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty. \tag{1.2}$$

Ha

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \beta, \tag{1.3}$$

akkor ebből következik, hogy

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta. \tag{1.4}$$

Itt α lehet egy a szám, az $a+$, $a-$, ∞ vagy $-\infty$ szimbólumok bármelyike, β jelentése pedig lehet egy b szám, ∞ vagy $-\infty$.

Bizonyítás. Abban a speciális esetben, mikor α véges, és (1.1) teljesül, vagyis $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Ekkor $f(\alpha) := g(\alpha) := 0$ definícióval az f és g függvények folytonosak lesznek az egész környezetben, α-t is beleértve. Az 1.4 Cauchy-középértéktétel szerint minden $x \neq \alpha$ esetén $\exists c \in (x,\alpha)$ (vagy $c \in (\alpha, x)$), melyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\alpha)}{g(x)-g(\alpha)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Legyen $x_k \to \alpha, x_k \neq \alpha$. Ekkor a hozzá a fentiek alapján létező c_k számokra $c_k \to \alpha, c_k \neq \alpha$ teljesül, és

$$\frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} \quad \forall k.$$

Így (1.3)-ból

$$\lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k)}{g(x_k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{f'(c_k)}{g'(c_k)} = \beta,$$

tehát az átviteli elv szerint (1.4) igaz. A bizonyítás maradék része megtalálható a Laczkovich-T. Sós jegyzetben. □

1.7. Példa.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

1.8. *Megjegyzés.* A sort folytathattuk volna egy újabb L'Hospital-szabály alkalmazásával a következőképpen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6},$$

de ez olyan, mint a „saját farkába harapó kígyó", hiszen a $\sin' x = \cos x$ bizonyításában felhasználtuk, hogy $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

1.9. Tétel (Taylor-formula)**.** *Legyen f $(n+1)$-szer differenciálható az $[a,x]$ intervallumban. Ekkor létezik olyan $c \in (a,x)$ szám, melyre*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{1.5}$$

Bizonyítás. Legyen a és x rögzítve, és $t \in (a,x)$ esetén definiáljuk

$$\begin{aligned} R(t) &:= f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k \\ &= f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Célunk belátni, hogy létezik $c \in (a,x)$, melyre

$$R(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{1.7}$$

Világos, hogy $R(x) = 0$. Az (1.6) formula (t szerinti) differenciálásából kapjuk:

$$\begin{aligned} R'(t) = -f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x-t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{1!}(x-t) \\ - \dots - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}. \end{aligned}$$

Itt egy kivételével minden tag kiesik, és marad:

$$R'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n. \tag{1.8}$$

Alkalmazzuk az 1.4 Cauchy-középértéktételt az $R(t)$ és $h(t) := (x-t)^{n+1}$ függvényekre az $[a,x]$ intervallumon. Vegyük észre, hogy $h(x) = 0$. Eszerint létezik $c \in (a,x)$, hogy

$$\begin{aligned} \frac{R(a)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{R(x)-R(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{R'(c)}{h'(c)} = \frac{R'(c)}{-(n+1)\cdot(x-c)^n} \\ = \frac{(f^{(n+1)}(c)/n!)\cdot(x-c)^n}{(n+1)\cdot(x-c)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk (1.8)-t. Ebből (1.7), így (1.5) következik. □

1.10. *Megjegyzés.* A fenti tételben szereplő (1.7) formulát *Lagrange-féle maradéktag*nak nevezzük.

2. Primitív függvény

Legyen I tetszőleges intervallum (korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt stb.). Jelölje $C(I)$ az I intervallumon értelmezett folytonos függvények halmazát és $D(I)$ az I intervallumon differenciálható függvények halmazát. Ezek $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak. Jelölje $D'(I)$ az $D(I)$-beli függvények deriváltjainak halmazát:

$$D'(I) := \{F' : F \in D(I)\}.$$

2.1. Állítás. *$D'(I)$ is vektortér.*

Bizonyítás. Házi feladat. □

2.2. *Megjegyzés.* $C(I)$ és $D(I)$ nem csak vektortér, hanem gyűrű, sőt algebra is (a szokásos műveletekkel). $D'(I)$ nem alkot sem gyűrűt sem algebrát.

2.3. Definíció. Legyen $f \in D'(I)$ adott függvény, azaz létezik olyan $F \in D(I)$, hogy $F' = f$. Ekkor minden ilyen $F \in D(I)$ függvényt az f függvény *primitív* (elsődleges vagy eredeti) *függvényé*nek vagy *határozatlan integrálj*ának nevezünk.

2.4. Állítás. *Ha $f \in D'(I)$ és $F \in D(I)$ egy primitív függvénye, akkor bármely $c \in \mathbb{R}$ esetén $(F+c)' = f$, így f-nek végtelen sok primitív függvénye van.*

Bizonyítás. Triviális. □

2.5. Állítás. *Ha F az f egy primitív függvénye, akkor f-nek minden más G primitív függvénye előáll $G = F + c$ alakban valamely $c \in \mathbb{R}$-re.*

Bizonyítás. Az állítás feltételeiből következik, hogy

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0,$$

vagyis $(F - G)' = 0$ az egész I intervallumon. Az 1.3 Következmény miatt $F - G$ konstans I-n, amivel az állítást beláttuk. □

2.6. Definíció. Adott f függvény esetén jelölje

$$\int f$$

(„integrál" f) az f függvény primitív függvényeinek halmazát I-n. Ha $f \notin D'(I)$, akkor $\int f = \emptyset$. Ha $f \in D'(I)$, akkor láttuk, hogy $\int f = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$. Ha nem okoz félreértést, akkor $\int f$ minden elemét is az egyszerűség kedvéért $\int f$-fel jelöljük, tehát

$$\left(\int f\right)' = f.$$

Szokásosak még az $\int f(x)$ és $\int f(x)\,dx$ jelölések is a primitív függvény x pontbeli helyettesítési értékére.

2.7. Példa. Legyen $I = \mathbb{R}$. Ekkor $\int \cos x\,dx = \sin x + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Alapintegrálok: ld. gyakorlatokon.

Probléma. Hogyan lehet felismerni egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényről, hogy van-e primitív függvénye I-ben, vagyis $f \in D'(I)$?

Válasz. Sehogy! De adható szükséges és adható elégséges feltétel.

2.8. Tétel (Elegendő feltétel primitív függvény létezésére)**.** *$C(I) \subset D'(I)$, azaz ha f folytonos I-n, akkor f-nek létezik I-ben primitív függvénye.*

2.9. *Megjegyzés.* Attól, hogy van, nem biztos, hogy számolással megadható...

Bizonyítás. Később. □

2.10. Példa. $\frac{1}{\ln x}$ az $I = (1, +\infty)$-en, e^{-x^2} az $I = \mathbb{R}$-en. Belátható, hogy nincs elemi primitív függvényük.

Primitív függvény-keresés vagy határozatlan integrálás: számolási technika (kalkulus), lényegében a differenciálás műveletének megfordítása.

2.11. Állítás (Az integrálás formális szabályai)**.**

I. Ha $f, g \in D'(I)$, akkor $f + g \in D'(I)$ (vektortér-tulajdonság), emellett

$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

II. Ha $f \in D'(I)$, $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges állandó, akkor $c \cdot f \in D'(I)$ (vektortér-tulajdonság), emellett

$$\int c \cdot f = c \cdot \int f.$$

2.12. Tétel (Parciális integrálás elve)**.** *Legyenek f és g differenciálhatók az I intervallumban, azaz $f, g \in D(I)$, és tegyük fel, hogy $f \cdot g' \in D'(I)$. Ekkor $f' \cdot g \in D'(I)$, és ez utóbbi (egy) primitív függvénye:*

$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás. Kell: $(f \cdot g - \int f \cdot g') \in D(I)$ – ez triv, és $(f \cdot g - \int f \cdot g')' = f' \cdot g$.

$$\left(f \cdot g - \int f \cdot g' \right)' = f' \cdot g + f \cdot g' - f \cdot g' = f' \cdot g.$$

□

2.13. Példa.

$$\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} \, dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x.$$

2.14. Tétel (Helyettesítéses integrálás elve)**.** *Legyenek I és I^* tetszőleges intervallumok, $f \in D'(I)$, $g \in D(I^*)$ adott függvények, úgy, hogy $R(g) \subset I$. Ekkor $(f \circ g) \cdot g' \in D'(I^*)$, és*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f \right) \circ g.$$

Bizonyítás. Legyen $F := \int f$, tehát $F \in D(I)$ és $F' = f$. Ismeretes, hogy ekkor $F \circ g$ is differenciálható I^*-ban, és

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'.$$

Így $F \circ g = \left(\int f \right) \circ g = \int (f \circ g) \cdot g'$. □

2.15. *Megjegyzés.* A gyakorlatban $g : I^* \to I$ bijektív függvényt érdemes választani, mert ekkor

$$\int f = \left(\int (f \circ g) \cdot g' \right) \circ g^{-1},$$

vagyis az eredeti primitív függvény meghatározható.

Klasszikus formalizmus.

$$\int f(x)\, dx \mid_{x=g(t)} = \int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\, dt, \qquad \frac{dx}{dt} = g'(t)$$

2.16. Példa. $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ kiszámítása az $I = [-1,1]$ intervallumon. Helyettesítsünk $x := = \sin t$-t, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] =: I^*$. Ekkor $\frac{dx}{dt} = \sin' t = \cos t$. Így

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx \mid_{x=\sin t} &= \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{f(g(t))=\sqrt{\cos^2 t}} \cdot \underbrace{\cos t}_{g'(t)}\, dt = \int |\cos t| \cdot \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt \\
&= \int \frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)\, dt = \frac{1}{2}\int 1\, dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\, dt \\
&= \frac{1}{2} t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \cos t\right).
\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\left(t+\sin t \cdot \cos t\right) \mid_{t=\arcsin x} = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}\right) \mid_{t=\arcsin x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right).
\end{aligned}$$

3. Riemann-integrál

3.1. A Riemann-integrál definíciója.

A Riemann-integrál lényege: „a függvény görbéje és a vízszintes tengely által határolt síkidom területe".

A terület matematikai fogalma: olyan $T : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ függvény, ahol $\mathcal{M}$ a sík mérhető részhalmazait jelöli, és a következő axiómák teljesülnek:

Terület-axiómák.

I. Ha H téglalap, oldalhosszai a és b, akkor $H \in \mathcal{M}$ és $T(H) = a \cdot b$;
II. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$ és $H_1 \subseteq H_2$, akkor $T(H_1) \le T(H_2)$ (monotonitás);
III. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$, és van olyan e egyenes, hogy az e által határolt félsíkok egyike tartalmazza H_1-et, másika H_2-t, akkor $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{M}$ és $T(H_1 \cup H_2) = T(H_1) + T(H_2)$;
IV. Ha a sík egy B részhalmaza teljesíti a következő feltételt: minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $A, C \in \mathcal{M}$ halmazok, hogy $A \subseteq B \subseteq C$ és $T(C) - T(A) < \varepsilon$, akkor $B \in \mathcal{M}$.

3.1. Definíció. Az $[a,b]$ intervallum egy *felosztása* egy olyan $\{I_i = [x_{i-1}, x_i] : i = 1, \ldots, n\}$ véges intervallumrendszer, melyre

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b$$

valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén. Az $[a,b]$ intervallum felosztásainak halmazát jelölje $\mathcal{F}[a,b]$.

3.2. Definíció. Legyen a $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ és $\Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztások *egyesítése* (vagy *közös finomítása*) az a $\Phi \vee \Psi$-vel jelölt felosztás, melyet úgy kapunk, hogy Φ osztópontjaihoz hozzávesszük a Ψ osztópontjait (vagy fordítva), és az így kapott új osztóponthalmazhoz tartozó intervallumrendszert tekintjük.

3.3. Definíció. Adott $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi=\{I_1,\dots,I_n\}\in\mathcal{F}[a,b]$ felosztás esetén definiálja a Φ felosztáshoz tartozó *alsó közelítőösszeget*

$$s_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{I_i} f\right)\cdot|I_i|,$$

felső közelítőösszeget

$$S_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f\right)\cdot|I_i|,$$

ahol $|I_i| := x_i - x_{i-1}$ az I_i intervallum hossza.

3.4. Állítás. *Tetszőleges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi\in\mathcal{F}[a,b]$ esetén*

$$S_f(\Phi) = -s_{-f}(\Phi).$$

Bizonyítás. $\sup_{I_i} f = -\inf_{I_i}(-f)$. □

3.5. *Megjegyzés.* Világos, hogy tetszőleges $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi\in\mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s_f(\Phi) \le S_f(\Phi).$$

Bizonyítás. Minden $i\in\mathbb{N}$ esetén $\inf_{I_i} f \le \sup_{I_i} f$. □

3.6. Tétel. *Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor bármely $\Phi,\Psi\in\mathcal{F}[a,b]$ felosztások esetén*

$$s_f(\Phi) \le S_f(\Psi). \tag{3.1}$$

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy bármely $\Phi,\Psi\in\mathcal{F}[a,b]$ felosztások esetén

$$s_f(\Phi) \le s_f(\Phi\vee\Psi) \le S_f(\Phi\vee\Psi) \le S_f(\Psi), \tag{3.2}$$

amiből (3.1) nyilván következik. A 2. egyenlőtlenség a 3.5. Megjegyzés alapján nyilvánvaló. A következőkben azt bizonyítjuk, hogy ha $\Theta\in\mathcal{F}[a,b]$ olyan felosztás, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy EGY új osztópontot hozzáveszünk, akkor

$$s_f(\Phi) \le s_f(\Theta). \tag{3.3}$$

Ebből az osztópontok számára vonatkozó teljes indukcióval következik az első egyenlőtlenség (3.2)-ben. A 3. egyenlőtlenség pedig ennek és a 3.4. Állításnak a folyománya.
Legyen tehát $\Theta\in\mathcal{F}[a,b]$ olyan felosztás, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy annak x_i és x_{i+1} osztópontjai közé felveszünk még egy u oszópontot, vagyis Θ osztópontjai

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < u < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

A (3.3) egyenlőtlenség két oldaláról az azonos tagokat elhagyva be kell látnunk, hogy

$$\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-x_i) \le \left(\inf_{[x_i,u]} f\right)\cdot(u-x_i) + \left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-u).$$

Mivel $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \le \inf_{[x_i,u]} f$ és $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \le \inf_{[u,x_{i+1}]} f$ (kisebb halmazon vett infimum nagyobb vagy egyenlő, mint a nagyobb halmazon vett), ezért

$$\left(\inf_{[x_i,u]} f\right)\cdot(u-x_i)+\left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-u)\geq\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right)\cdot((u-x_i)+(x_{i+1}-u))$$
$$=\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-x_i),$$

így az állítást beláttuk. □

3.7. Következmény. *A*

$$\{s_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\}\quad \text{és}\quad \{S_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\}$$

halmazok közül a bal oldali halmaz minden eleme *kisebb vagy egyenlő a jobb oldali halmaz* minden eleménél. *Ebből az is következik, hogy az első halmaz felülről, a második alulról korlátos.*

3.8. Definíció. Definiálja az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény *Darboux-féle alsó integrálját*

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\left\{s_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\right\}, \tag{3.4}$$

és *Darboux-féle felső integrálját*

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\left\{S_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\right\}. \tag{3.5}$$

A 3.7. Következmény alapján

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f. \tag{3.6}$$

3.9. Definíció. Egy korlátos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvényt *Riemann-integrálható*nak mondunk, ha

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f.$$

Ha f Riemann-integrálható, akkor az alsó és felső Darboux-integrálok közös értékét f *Riemann-integráljának* nevezzük, és az alábbi módon jelöljük:

$$\int_a^b f \text{ vagy } \int_a^b f(x)\,dx.$$

3.10. Példa. $\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}$.

Bizonyítás. Rögzített $n\in\mathbb{N}$ esetén legyen a Φ_n felosztás az az intervallumrendszer, amit a

$$\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\right\}$$

osztópontok határoznak meg. Ekkor

$$s_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^3},$$
$$S_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6n^3},$$

tehát $s_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$ és $s_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$, ha $n \to \infty$. Ebből könnyen látható, hogy $f(x) = x^2$ Riemann-integrálható [0,1]-en, és Riemann-integrálja $\frac{1}{3}$. □

A továbbiakban jelölje

$$R[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ korlátos és Riemann-integrálható}\}$$

3.11. Definíció. Ha $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, akkor az

$$\Omega_f(\Phi) := S_f(\Phi) - s_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f\right) \cdot |I_i|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I_i\}) \cdot |I_i| = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i|$$

számot az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összegé*nek nevezzük. Az

$$\omega_f(I_i) = \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f = \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in I_i\}$$

az f függvény *oszcillációja* az I_i intervallumon.

3.12. Tétel (Leghasznosabb kritérium Riemann-integrálhatóságra)**.** *Egy korlátos $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, vagyis $f \in R[a,b]$ pontosan akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\Phi = \Phi(\varepsilon) \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. 1. irány: Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható, és legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. A 3.9. Definíció szerint tudjuk, hogy

$$\int_{a\,*}^{b} f = \int_{a}^{b\,*} f = \int_a^b f.$$

A 3.8. Definíció alapján létezik olyan $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,b]$, hogy

$$s_f(\Phi_1) > \int_{a\,*}^{b} f - \frac{\varepsilon}{2},$$

és létezik $\Phi_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, hogy

$$S_f(\Phi_2) < \int_{a}^{b\,*} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezekből, a (3.2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < s_f(\Phi_1) \leq s_f(\Phi_1 \vee \Phi_2) \leq S_f(\Phi_1 \vee \Phi_2)$$

$$\leq S_f(\Phi_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből $\Phi := \Phi_1 \vee \Phi_2$ választással

$$\Omega_f(\Phi) = S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - (\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

2. irány: Tegyük fel indirekt, hogy a tétel állításában szereplő feltétel teljesül minden pozitív ε-ra, de

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f.$$

Legyen

$$0 < \varepsilon < \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f$$

tetszőleges, és válasszunk ε-hoz $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást úgy, hogy $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Ekkor

$$s_f(\Phi) \leq \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f \leq S_f(\Phi) = s_f(\Phi) + \Omega_f(\Phi) < s_f(\Phi) + \varepsilon.$$

Ebből viszont

$$\varepsilon = s_f(\Phi) + \varepsilon - s_f(\Phi) > \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f,$$

ami ellentmondás. □

Kis kitérő:

3.13. Definíció. Az $f : H \to \mathbb{R}$ függvényről azt mondjuk, hogy *egyenletesen folytonos H-n*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $t, s \in H$, $|t - s| < \delta$ esetén $|f(t) - f(s)| < \varepsilon$.

3.14. Tétel (Heine-tétel). *Legyen $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. (Vizsgán nem kell tudni.) Tegyük fel, hogy van olyan $\varepsilon > 0$ szám, melyhez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén található $t_n, s_n \in [a,b]$, $|t_n - s_n| < 1/n$, hogy

$$|f(t_n) - f(s_n)| \geq \varepsilon.$$

Mivel az $[a,b]$ intervallum korlátos és zárt, ezért a $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatnak van konvergens részsorozata, $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, melyre $t_{n_k} \to t \in [a,b]$, $k \to \infty$. Mivel $|t_{n_k} - s_{n_k}| < 1/n_k$, azért $s_{n_k} \to t$ is teljesül. Ebből a folytonosságra vonatkozó átviteli elv szerint $f(t_{n_k}) \to f(t)$ és $f(s_{n_k}) \to f(t)$, $k \to \infty$ ami ellentmond annak, hogy minden k-ra $|f(t_{n_k}) - f(s_{n_k})| \geq \varepsilon$. □

A Heine-tétel felhasználásával látható be, hogy minden folytonos függvény Riemann-integrálható.

3.15. Tétel. *$C[a,b] \subset R[a,b]$, vagyis minden, az $[a,b]$ intervallumon folytonos függvény Riemann-integrálható $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C[a,b]$. A 3.12. Tétel integrálhatósági feltételét fogjuk használni, tehát legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és keresünk hozzá olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. A 3.14. Heine-tétel alapján f egyenletesen is folytonos $[a,b]$-n, tehát az $\varepsilon/(b-a)$ pozitív számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $t, s \in [a,b]$, $|t-s| \leq \delta$, akkor $|f(t) - f(s)| < \varepsilon/(b-a)$. Válasszuk meg $n \in \mathbb{N}$-et úgy, hogy $\frac{b-a}{n} < \delta$ legyen. Legyenek a Φ felosztás osztópontjai

$$x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n},\ i = 1, \ldots, n,$$

vagyis az $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ intervallumban bármely két szám különbsége legfeljebb $1/n$, így itt a függvény oszcillációja legfeljebb $\varepsilon/(b-a)$. Erre a felosztásra tehát

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} |I_i| = \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk. □

3.16. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in R[a,b]$ és $\varepsilon > 0$ rögzítve. A 3.12. Tétel alapján ε-hoz létezik olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\Omega_{|f|}(\Phi) \leq \Omega_f(\Phi) < \varepsilon$ is teljesül. Mivel adott Φ felosztás esetén

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i|,$$

ezért elég belátni, hogy minden i-re

$$\omega_{|f|}(I_i) \leq \omega_f(I_i).$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $x, y \in I_i$ esetén

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(I_i),$$

amiből

$$\omega_{|f|}(I_i) = \sup\{|f(x)| - |f(y)| : x, y \in I_i\} \leq \omega_f(I_i).$$

□

3.17. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f \cdot g \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve, és a 3.12. Tétel alapján keresünk hozzá $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást. Definiáljuk

$$K := \max\{\sup_{[a,b]} |f|, \sup_{[a,b]} |g|\},$$

és válasszunk $\frac{\varepsilon}{2K}$-hoz $\Phi_f, \Phi_g \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásokat, melyekre

$$\Omega_f(\Phi_f) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi_g) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

(Ha $K=0$, az érdektelen eset.) Tekintsük ezen felosztások egyesítését:

$$\Phi := \Phi_f \vee \Phi_g.$$

Ekkor (3.2) alapján

$$\Omega_f(\Phi) \le \Omega_f(\Phi_f) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi) \le \Omega_g(\Phi_g) < \frac{\varepsilon}{2K}$$

is teljesül. Legyen $I_i \in \Phi$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $x, y \in I_i$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x)g(x)-f(y)g(y)| &= |f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)| \\ &\le |f(x)||g(x)-g(y)|+|f(x)-f(y)||g(y)| \\ &\le K\cdot\omega_g(I_i)+\omega_f(I_i)\cdot K = K\cdot(\omega_g(I_i)+\omega_f(I_i)). \end{aligned}$$

Ebből

$$\omega_{f\cdot g}(I_i) = \sup\{|f(x)g(x)-f(y)g(y)| : x,y\in I_i\} \le K\cdot(\omega_g(I_i)+\omega_f(I_i)).$$

Összegezve $i=1,\dots,n$-re kapjuk

$$\begin{aligned} \Omega_{f\cdot g}(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n}\omega_{f\cdot g}(I_i)\cdot|I_i| \le \sum_{i=1}^{n} K\cdot(\omega_g(I_i)+\omega_f(I_i))\cdot|I_i| \\ &= K\cdot\Omega_g(\Phi)+K\cdot\Omega_f(\Phi) < K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}+K\cdot\frac{\varepsilon}{2K}=\varepsilon. \end{aligned}$$

□

A következő definícióra szükség lesz az integrálhatóság Riemann-féle kritériumának megfogalmazásához.

3.18. Definíció. Ha $\Phi=\{I_1,\dots,I_n\}\in\mathcal{F}[a,b]$ egy felosztás, akkor definiálja Φ *finomságát*

$$|\Phi| := \max\{|I_i| : i=1,\dots,n\}.$$

Először bebizonyítunk egy, a 3.12. Tételben szereplő kritériumhoz nagyon hasonló integrálhatósági feltételt, ami azonban „több" annál. Erre szükség lesz az integrálhatóság Riemann-féle feltételének bizonyításában.

3.19. Tétel. *Legyen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos. Ekkor az alábbi két állítás egymással egyenértékű:*

(i) $f\in R[a,b]$;

(ii) Minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\delta>0$, hogy minden $\Phi\in\mathcal{F}[a,b]$, $|\Phi|<\delta$ felosztás esetén

$$\Omega_f(\Phi)<\varepsilon.$$

Bizonyítás. A $(ii)\Rightarrow(i)$ következik a 3.12. Tételből.
$(i)\Rightarrow(ii)$: Legyen $\varepsilon>0$ rögzített. A 3.12. Tétel alapján létezik olyan $\Psi\in\mathcal{F}[a,b]$, melyre $\Omega_f(\Psi)<\varepsilon/2$. Rögzítsük le ezt a $\Psi:=\{I_1,\dots,I_N\}$ felosztást. A bizonyítás hátralévő részében a következőképpen járunk el. Tetszőleges $\Phi\in\mathcal{F}[a,b]$ felosztás esetén tudjuk, hogy

$$\Omega_f(\Phi\vee\Psi)\le\Omega_f(\Psi)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Másrészt $\Omega_f(\Phi\vee\Psi)\le\Omega_f(\Phi)$ is teljesül. A δ pozitív számot olyan kicsire fogjuk választani, hogy ha $|\Phi|<\delta$, akkor $\Omega_f(\Phi)$ ne térjen el $\varepsilon/2$-nél jobban $\Omega_f(\Phi\vee\Psi)$-től – amiről tudjuk, hogy kisebb, mint $\varepsilon/2$. Könnyen látható(!), hogy

$$\Omega_f(\Phi)-\Omega_f(\Phi\vee\Psi)\le N\cdot\omega_f([a,b])\cdot|\Phi|,$$

ahol N jelölte a Ψ által tartalmazott intervallumok számát. Válasszunk

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2N \cdot \omega_f([a,b])}.$$

Ha $|\Phi| < \delta$, akkor

$$\Omega_f(\Phi) \le \Omega_f(\Phi \vee \Psi) + N \cdot \omega_f([a,b]) \cdot |\Phi| < \Omega_f(\Phi \vee \Psi) + N \cdot \omega_f([a,b]) \cdot \frac{\varepsilon}{2N \cdot \omega_f([a,b])}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Az integrálhatóság Riemann-féle kritériumának kimondásához szükségünk lesz még az alábbi fogalomra.

3.20. Definíció. Legyen $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $\Phi = \{I_1, \dots, I_n\}$ felosztás, és $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, a Φ *felosztásra illeszkedő vektor*, vagyis

$$\xi_i \in I_i,\ i = 1, \dots, n,$$

jelölésben: $\xi \propto \Phi$. Ekkor a

$$\sigma_f(\Phi, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

számot az f függvény (Φ, ξ) párhoz tartozó *Riemann-összegé*nek nevezzük.

3.21. *Megjegyzés.* Tetszőleges $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ és $\xi \propto \Phi$ vektor esetén

$$s_f(\Phi) \le \sigma_f(\Phi, \xi) \le S_f(\Phi).$$

3.22. Tétel (Az integrálhatóság Riemann-féle kritériuma)**.** *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos. Ekkor az alábbi két állítás egymással egyenértékű:*

(i) $f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = A$;

(ii) Minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $|\Phi| < \delta$ felosztás, és minden $\xi \propto \Phi$ esetén

$$|\sigma_f(\Phi, \xi) - A| < \varepsilon.$$

3.23. *Megjegyzés.* A tétel az f korlátosságának feltétele nélkül is igaz, vagyis bármelyik állításból következik az is, hogy f korlátos $[a,b]$-n.

Bizonyítás. (Vizsgán nem kell tudni.)

$(i) \Rightarrow (ii)$: Legyen $f \in R[a,b]$ és $\int_a^b f = A$. Ekkor definíció szerint

$$\int_{*a}^{b} f = \int_a^{b*} f = A.$$

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Az előző 3.19. Tétel alapján létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|\Phi| < \delta$, akkor

$$\Omega_f(\Phi) = S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \varepsilon.$$

Megmutatjuk, hogy ez a δ választás itt is jó. Legyen $\xi \propto \Phi$ tetszőleges. Ekkor

$$A-\varepsilon = \int_a^{b*} f - \varepsilon \le S_f(\Phi) - \varepsilon < s_f(\Phi) = \sum_{i=1}^n \inf_{I_i} f \cdot |I_i|$$

$$\le \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot|I_i| \le \sum_{i=1}^n \sup_{I_i} f\cdot|I_i| = S_f(\Phi) < s_f(\Phi)+\varepsilon \le \int_{a*}^{b} f + \varepsilon = A+\varepsilon.$$

Ebből

$$A-\varepsilon < \sigma_f(\Phi,\xi) < A+\varepsilon,$$

tehát $|\sigma_f(\Phi,\xi)-A| < \varepsilon$, amit be akartunk látni.
$(ii) \Rightarrow (i)$: Tegyük fel, hogy (ii) teljesül egy $A \in \mathbb{R}$ számra. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$\int_{a*}^{b} f = \int_a^{b*} f = A.$$

A bizonyítás úgy fog történni, hogy belátjuk: tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$A-\varepsilon < \int_{a*}^{b} f \text{ és } \int_a^{b*} f < A+\varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Válasszunk $\varepsilon/2$-höz $\delta > 0$ számot a (ii) alapján, és legyen $\Phi = \{I_1,\dots,I_n\}$, $|\Phi| < \delta$ tetszőleges felosztás. Válasszunk $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \propto \Phi$ vektort úgy, hogy

$$f(\xi_i) > \sup_{I_i} f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ i=1,\dots,n$$

– ilyen $\xi_i \in I_i$ a szuprémum definíciója miatt létezik minden i-re. Ekkor δ választása alapján

$$|\sigma_f(\Phi,\xi)-A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből

$$A+\frac{\varepsilon}{2} > \sigma_f(\Phi,\xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\cdot|I_i| > \sum_{i=1}^n \left(\sup_{I_i} f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)\cdot|I_i|$$

$$= S_f(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot\sum_{i=1}^n |I_i| = S_f(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2} \ge \int_a^{b*} f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\int_a^{b*} f < A+\varepsilon.$$

Az $A-\varepsilon < \int_{a*}^{b} f$ egyenlőtlenség analóg módon bizonyítható. $\square$

3.2. A Newton-Leibniz tétel.

Az legutóbb bizonyított integrálási kritérium segítségével be tudjuk látni a Riemann-integrálra vonatkozó egyik legfontosabb tételt.

3.24. Tétel (Newton-Leibniz tétel). *Ha $f \in R[a,b]$ és $f \in D'[a,b]$, vagyis f-nek létezik primitív függvénye, akkor f minden F primitív függvényére*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F]_a^b = F|_a^b.$$

Bizonyítás. Mivel f két primitív függvénye csak konstansban térhet el, a jobb oldal független F választásától. Világos, hogy elég azt bizonyítani, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

A 3.22. Tétel alapján ε-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $|\Phi| < \delta$, és minden $\xi \propto \Phi$ esetén

$$\left| \sigma_f(\Phi, \xi) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Legyen $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $|\Phi| < \delta$ rögzített. Válasszuk meg $\xi \in \mathbb{R}^n$-t a következőképpen: ha Φ osztópontjainak halmaza $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, akkor $F|_{[x_{i-1}, x_i]}$-re alkalmazva a Lagrange-középértéktételt létezik olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, melyre

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Az így kapott $\xi \propto \Phi$ vektorra

$$\sigma_f(\Phi, \xi) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a),$$

amivel a tételt beláttuk. □

A Newton-Leibniz tétel feltételeit teljesítő függvényekre bizonyíthatók a primitív függvényeknél megismert parciális és helyetettesítéses integrálás szabályai.

3.25. Tétel (Parciális integrálás Riemann-integrálra). *Legyen $f, g \in R[a,b]$ és $f, g \in D'[a,b]$, (egy) primitív függvényük legyen F ill. G. Ekkor*

$$\int_a^b f \cdot G = [F \cdot G]_a^b - \int_a^b F \cdot g.$$

Bizonyítás. Mivel F és G differenciálhatók, így folytonosak, tehát Riemann-integrálhatók is $[a,b]$-n, ld. 3.15. Tétel. A 3.17. Tétel alapján pedig a szorzatok integráljai is léteznek. Mivel

$$(F \cdot G)' = f \cdot G + F \cdot g,$$

ezért a 3.24. Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_a^b (f\cdot G+F\cdot g)=[F\cdot G]_a^b.$$

Nemsokára látni fogjuk a 3.27. Állításban, hogy

$$\int_a^b (f\cdot G+F\cdot g)=\int_a^b f\cdot G+\int_a^b F\cdot g,$$

amivel a bizonyítás teljes. □

Jelölés. $f\in R[a,b]$ esetén jelölje

$$\int_b^a f:=-\int_a^b f.$$

3.26. Tétel (Helyettesítéses integrálás Riemann-integrálra)**.** *Legyen $I=[a,b]$ intervallum, $f\in R[a,b]$ és $f\in D'[a,b]$. Legyen továbbá $I^*=[\alpha,\beta]$ intervallum, $g:I^*\to I$ differenciálható bijekció, melyre $(f\circ g)\cdot g'\in R[\alpha,\beta]$. Ekkor*

$$\int_a^b f=\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)}(f\circ g)\cdot g'.$$

Bizonyítás. A feltételekből azonnal következik, hogy g vagy szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton fogyó, tehát $g^{-1}(a)=\alpha$, $g^{-1}(b)=\beta$, vagy fordítva. Mivel

$$(F\circ g)'=(f\circ g)\cdot g',$$

ezért a 3.24. Newton-Leibniz tétel szerint

$$\int_\alpha^\beta (f\circ g)\cdot g'=F(g(\beta))-F(g(\alpha))=\begin{cases}F(b)-F(a), & \text{ha } g \text{ monoton novő;}\\ F(a)-F(b), & \text{ha } g \text{ monoton fogyó.}\end{cases}\tag{3.7}$$

Másrészt, szintén a Newton-Leibniz tétel alapján

$$\int_a^b f=F(b)-F(a).$$

Ha g monoton növő, a tétel azonnal következik; ha monoton fogyó, a (3.7) egyenlőség mindkét oldalának ellentettjét véve kész a bizonyítás. □

3.3. A Riemann-integrál formális tulajdonságai.

3.27. Állítás. *$R[a,b]$ vektortér $\mathbb{R}$ felett a szokásos függvényműveletekre nézve.*

Bizonyítás. Legyen $f,g\in R[a,b]$. Megmutatjuk, hogy ekkor $f+g\in R[a,b]$ és

$$\int_a^b (f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g.$$

A bizonyításhoz a 3.22. Tételben szereplő integrálhatósági kritériumot használjuk. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, rögzített. Ekkor $\varepsilon/2$-höz találhatók olyan $\delta_f, \delta_g > 0$ számok, hogy ha $|\Phi| < \delta_f$ és $\xi \propto \Phi$ tetszőleges, akkor

$$\left|\sigma_f(\Phi,\xi) - \int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

valamint ha $|\Psi| < \delta_g$ és $\eta \propto \Psi$ tetszőleges, akkor

$$\left|\sigma_g(\Psi,\eta) - \int_a^b g\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyen

$$\delta := \min\{\delta_f, \delta_g\}.$$

Választva tetszőleges $\phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $|\Phi| < \delta$ felosztást és $\xi \propto \Phi$ vektort,

$$\sigma_{f+g}(\Phi,\xi) = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \cdot |I_i| = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot |I_i| + \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot |I_i| = \sigma_f(\Phi,\xi) + \sigma_g(\Phi,\xi),$$

amiből háromszög-egyenlőtlenséggel kapjuk:

$$\left|\sigma_{f+g}(\Phi,\xi) - \int_a^b f - \int_a^b g\right| = \left|\sigma_f(\Phi,\xi) - \int_a^b f + \sigma_g(\Phi,\xi) - \int_a^b g\right|$$
$$\leq \left|\sigma_f(\Phi,\xi) - \int_a^b f\right| + \left|\sigma_g(\Phi,\xi) - \int_a^b g\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Legyen most $f \in R[a,b]$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy ekkor $c \cdot f \in R[a,b]$ és

$$\int_a^b c \cdot f = c \int_a^b f.$$

Ha $c=0$, akkor $c \cdot f \equiv 0 \in R[a,b]$. Ha $c \neq 0$, akkor válasszunk $\frac{\varepsilon}{|c|}$-hoz δ-t a 3.22. Tétel alapján. Könnyen látható, hogy bármilyen $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $|\Phi| < \delta$ és $\xi \propto \Phi$ esetén

$$\sigma_{c \cdot f}(\Phi,\xi) = c \cdot \sigma_f(\Phi,\xi).$$

Így

$$\left|\sigma_{c\cdot f}(\Phi,\xi) - c \cdot \int_a^b f\right| = \left|c \cdot \sigma_f(\Phi,\xi) - c \cdot \int_a^b f\right| = |c| \cdot \left|\sigma_f(\Phi,\xi) - \cdot \int_a^b f\right| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,$$

tehát a 3.22. Tétel alapján az állítást beláttuk. □

3.28. Állítás. *Legyen $f \in R[a,b]$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Ekkor $f|_{[\alpha,\beta]} \in R[\alpha,\beta]$.*

Bizonyítás. A 3.12. Tétel szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, melyre $\Omega_f(\Phi) < < \varepsilon$. Véve ezen felosztás $[\alpha,\beta]$ intervallumba eső osztópontjait és az így kapott $\Psi \in \mathcal{F}[\alpha,\beta]$ felosztást kapjuk, hogy

$$\Omega_{f|_{[\alpha,\beta]}}(\Psi) \leq \Omega_f(\Phi) < \varepsilon.$$

□

3.29. Állítás (Intervallum szerinti additivitás)**.** *Legyen* $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ *függvény,* $a < b < c$. *Tegyük fel, hogy* $f \in R[a, b]$ *és* $f \in R[b, c]$. *Ekkor* $f \in R[a, c]$ *és*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Bizonyítás. Mivel f korlátos $[a, b]$-n és $[b, c]$-n, ezért korlátos $[a, c]$-n is. A 3.8. Definíció alapján könnyen látható, hogy

$$\int_{*a}^{b} f + \int_{*b}^{c} f \leq \int_{*a}^{c} f \leq \int_a^{c*} f \leq \int_a^{b*} f + \int_b^{c*} f.$$

A feltétel szerint az egyenlőtlenségsorozat két vége megegyezik, amiből

$$\int_{*a}^{c} f = \int_a^{c*} f = \int_{*a}^{b} f + \int_{*b}^{c} f = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

így a 3.9. Definíció alapján az állítást beláttuk. □

3.30. Állítás (Integrandus szerinti monotonitás)**.** *Legyenek* $f, g \in R[a, b]$ *függvények, és tegyük fel, hogy minden* $x \in [a, b]$ *esetén* $f(x) \leq g(x)$. *Ekkor*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a, b]$ esetén

$$s_f(\Phi) \leq s_g(\Phi),$$

amiből

$$\int_a^b f = \int_{*a}^{b} f \leq \int_{*a}^{b} g = \int_a^b g.$$

□

3.31. Következmény. *Bármely* $f \in R[a, b]$ *függvényre fennáll:*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Bizonyítás. Minden $x \in [a, b]$ esetén

$$(-|f|)(x) = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = |f|(x),$$

amiből az állítás a 3.30. Állítás alapján következik. □

3.32. Állítás (Integrál triviális becslése)**.** *Legyen* $f \in R[a, b]$. *Ekkor*

$$(\inf_{[a,b]} f) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq (\sup_{[a,b]} f) \cdot (b - a).$$

Bizonyítás. A bizonyítás azonnal adódik a 3.30. Állításnak az $\inf f$ konstans függvény és f ill. f és a $\sup f$ konstans függvényre való alkalmazásából. □

3.33. Következmény. *Legyen $f \in R[a,b]$. Ekkor*

$$\left|\int_a^b f\right| \le \left(\sup_{[a,b]} |f|\right) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. Könnyen látható a 3.31. Következmény és a 3.32. Állítás alapján. □

Ezen becslések segítségével (folytonos függvényekre) bizonyítható a differenciálszámításban megismert középértéktétel analógja Riemann-integrálra.

3.34. Tétel (Integrálszámítás középértéktétele)**.** *Legyen $f \in C[a,b]$. Ekkor létezik olyan $c \in [a,b]$, melyre*

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. A 3.32. Állítás alapján és a Weierstrass-tételből kapjuk

$$\min_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} f \le \frac{\int_a^b f}{b-a} \le \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f.$$

A Bolzano-tétel miatt van olyan $c \in [a,b]$, melyre

$$f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a},$$

amivel az állítást beláttuk. □

3.4. Integrálfüggvények.

3.35. Definíció. Az $f \in R[a,b]$ függvény *integrálfüggvényei* az $[a,b]$ intervallumon értelmezett

$$[a,b] \ni x \mapsto c + \int_a^x f$$

függvények, ahol $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. (A 3.28. Állítás alapján $f|_{[a,x]} \in R[a,x]$).

3.36. Definíció. Az f függvény *Lipschitz-tulajdonságú*, ha van olyan $L > 0$ szám, hogy minden $x, y \in D(f)$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y|.$$

Könnyen látható, hogy egy Lipschitz-tulajdonságú függvény egyenletesen folytonos $D(f)$-en (ε-hoz $\delta := \varepsilon/L$ választható).

3.37. Tétel. *Bármely $f \in R[a,b]$ bármely integrálfüggvénye Lipschitz-tulajdonságú, így folytonos (sőt, egyenletesen folytonos) $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen $F(x) := c + \int_a^x f$ és $x, y \in [a,b]$. Ekkor a 3.29. Állítás alapján

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| = \left| \int_x^y f \right|.$$

Felhasználva a 3.33. Következményben szereplő becslést kapjuk, hogy

$$|F(x) - F(y)| \leq \left(\sup_{[a,b]} |f| \right) \cdot |x - y|,$$

amiből $L := \sup_{[a,b]} |f|$ választással a tétel következik. □

3.38. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$ és $f \in D'[a,b]$, vagyis f kielégíti a Newton-Leibniz-tétel feltételeit, akkor f primitív függvényeinek $\int f$ halmaza megegyezik f integrálfüggvényeinek halmazával. Ez azt is jelenti, hogy ekkor f integrálfüggvényei differenciálhatók, és deriváltjuk éppen f.*

Bizonyítás. Legyen F a f egy primitív függvénye, vagyis $F' = f$. Ekkor a 3.24. Newton-Leibniz tétel szerint bármely $x \in [a,b]$ esetén

$$\int_a^x f = F(x) - F(a),$$

tehát F egy integrálfüggvény $c := F(a)$ választással.
Fordítva, legyen

$$F(x) := c + \int_a^x f.$$

Rögzítsük f egy F_0 primitív függvényét – ez a feltétel alapján létezik. A 3.24. Newton-Leibniz tétel alapján

$$F(x) - c = \int_a^x f = F_0(x) - F_0(a),$$

amiből $F(x) = F_0(x) + d$, $d = c - F_0(a)$, tehát F is primitív függvénye f-nek. □

Annak idején a 2.8. Tételt, vagyis hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, bizonyítás nélkül mondtuk ki. Most elérkeztünk oda, hogy ezt a tételt igazoljuk. Mivel egy folytonos függvény Riemann-integrálható is, a most belátott tétel alapján primitív függvénye csak integrálfüggvénye lehet, és innen a bizonyítás könnyen adódik.

3.39. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$ és f folytonos az $u \in [a,b]$ helyen, akkor f bármely F integrálfüggvénye differenciálható u-ban, és deriváltja $F'(u) = f(u)$.*

Bizonyítás. Legyen

$$F(x) = c + \int_a^x f, \; x \in [a,b].$$

Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in [a,b]$, $|x - u| < \delta$, $x \neq u$, akkor

$$\left| \frac{F(x) - F(u)}{x - u} - f(u) \right| < \varepsilon.$$

Ebből már következik, hogy

$$\lim_{x\to u}\frac{F(x)-F(u)}{x-u}=F'(u)=f(u).$$

Mivel f folytonos u-ban, ezért ε-hoz létezik olyan $\delta>0$, hogy ha $x\in[a,b]$, $|x-u|<\delta$, akkor $|f(x)-f(u)|<\varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ez a δ jó lesz. Legyen $x\in[a,b]$, $|x-u|<\delta$ rögzítve, és tegyük fel, hogy $x\geq u$. A F függvény definíciója és a 3.29. Állítás szerint

$$\left|\frac{F(x)-F(u)}{x-u}-f(u)\right|=\left|\frac{1}{x-u}\int_u^x f(t)\,dt-\frac{1}{x-u}\int_u^x f(u)\,dt\right|=\left|\frac{1}{x-u}\int_u^x (f(t)-f(u))\,dt\right|$$

A 3.33. Következményből kapjuk, hogy

$$\left|\frac{F(x)-F(u)}{x-u}-f(u)\right|\leq\sup\{|f(t)-f(u)|:t\in[u,x]\}\leq\varepsilon.$$

Az $x\leq u$ eset hasonlóan bizonyítható. □

3.40. Következmény. *Ha $f\in C[a,b]$, akkor f-nek van primitív függvénye $[a,b]$-n (éspedig bármely integrálfüggvénye az).*

3.41. Alkalmazás. Riemann-integrálás alkalmazásával igazolható az ún. *Wallis-formula*:

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{(2i)^2}{(2i-1)\cdot(2i+1)}=\frac{\pi}{2},$$

ld. Császár II.2.27.

4. Improprius integrál

Ki szeretnénk terjeszteni a Riemann-integrál fogalmát nyílt, félig nyílt és nem korlátos intervallumokra.

4.1. Definíció. Legyen I nemelfajuló intervallum, $f:I\to\mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy *f lokálisan integrálható I-n*, ha

$$f|_{[a,b]}\in R[a,b]$$

minden $[a,b]\subset I$ esetén. Jelölés: $R^{loc}(I)$.

4.2. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy ha $I=[a,b]$, akkor $R^{loc}[a,b]=R[a,b]$.

4.3. Definíció. Ha $f\in R^{loc}(I)$,akkor *f integrálfüggvényei* az I-n értelmezett

$$I\ni x\mapsto c+\int_u^x f$$

alakú függvények, ahol $c\in\mathbb{R}$, $u\in I$.

4.4. Definíció. Legyen I nemelfajuló intervallum, $f:I\to\mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy *f impropriusan integrálható I-n*, ha $f\in R^{loc}(I)$ és f-nek létezik olyan F integrálfüggvénye I-n, melyre

$$\exists\lim_{\inf I+0}F\in\mathbb{R}\text{ és }\exists\lim_{\sup I-0}F\in\mathbb{R}.$$

Ekkor f *improprius integrálja* I-n:

$$\int_I f := \int_{\inf I}^{\sup I} f = \lim_{\sup I - 0} F - \lim_{\inf I + 0} F.$$

4.5. *Megjegyzés.* Ha a fenti feltételek mellett a $\lim_{\inf I+0} F$ és $\lim_{\sup I-0} F$ határértékek léteznek, de egyikük végtelen, a másik véges; vagy ellenkező előjelű végtelenek, akkor szokás azt mondani, hogy f improprius integrálja ($+$ vagy $-$) végtelen.

4.6. Példa.

I. $I := [0, +\infty)$, $f : I \to \mathbb{R}, f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
II. $I := [1, +\infty)$, $f : I \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$
III. $I := (0,1]$, $f : I \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

4.7. *Megjegyzés.* Ha $f \in R[a,b]$, akkor a 3.37. Tétel szerint F integrálfüggvénye folytonos az a és b végpontokban, ezért határértékei is léteznek, és megegyeznek a helyettesítési értékkel.

4.8. Lemma (Függvény határértékére vonatkozó Cauchy-kritérium)**.** *Legyen F értelmezve az $I \setminus \{x_0\}$ halmazon, ahol I intervallum, $x_0 \in I$ (vagy $x_0 = +\infty$ vagy $x_0 = -\infty$). Ekkor F-nek pontosan akkor van véges határértéke az x_0 helyen, ha a következő feltétel teljesül: minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$ úgy, hogy ha $|x - x_0| < \delta$ és $|y - x_0| < \delta$, $x, y \neq x_0$ (ill. $x, y > \delta$, $x_0 = +\infty$ esetén; $x, y < -\delta$, $x_0 = -\infty$ esetén), akkor*

$$|F(x) - F(y)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Következik a függvény-határértékre vonatkozó átviteli elvből. □

4.9. Tétel (Cauchy-féle szükséges és elégséges feltétel improprius integrálhatóságra)**.** *Legyen I nemelfajuló intervallum, $f \in R^{loc}(I)$. Ekkor f pontosan akkor impropriusan integrálható I-n, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $a, b \in I$, $\inf I < a \leq b < \sup I$ számok, hogy*

$$\text{ha } \inf I < u < v < a, \text{ akkor } \left| \int_u^v f \right| < \varepsilon,$$

és

$$\text{ha } b < u < v < \sup I, \text{ akkor } \left| \int_u^v f \right| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Következik abból, hogy ha F integrálfüggvénye f-nek I-n, akkor

$$\int_u^v f = F(v) - F(u).$$

Alkalmazzuk az előbbi tételt F-re. □

4.10. Példa.

$$f : [1, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

Parciális integrálással kapjuk:

$$\int_u^v \frac{\sin t}{t}\, dt = \left[\frac{-\cos t}{t} \right]_u^v - \int_u^v \frac{\cos t}{t^2}\, dt.$$

Ebből

$$\begin{aligned}\left|\int_u^v \frac{\sin t}{t}\,dt\right| &= \left|\frac{-\cos v}{v}+\frac{\cos u}{u}-\int_u^v \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| \\ &\le \left|\frac{-\cos v}{v}\right|+\left|\frac{\cos u}{u}\right|+\int_u^v \left|\frac{\cos t}{t^2}\right| dt \le \frac{1}{v}+\frac{1}{u}+\int_u^v \frac{1}{t^2}\,dt \\ &\le \frac{1}{v}+\frac{1}{u}+\left[-\frac{1}{t}\right]_u^v = \frac{2}{u} < \varepsilon,\end{aligned}$$

ha $\frac{2}{\varepsilon} < u < v$.

4.11. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyen $f \in R^{loc}(I)$. Tegyük fel, hogy léteznek $\alpha, \beta \in I$, $\inf I < \alpha \le \beta < \sup I$ számok és*

$$g_1 : I \cap (-\infty, \alpha] \to [0, +\infty),\ g_2 : I \cap [\beta, +\infty] \to [0, +\infty)$$

függvények, melyek improprius integrálhatók, és majorálják f-et, vagyis

$$\forall x \in D(g_1) : |f(x)| \le g_1(x) \text{ és } \forall x \in D(g_2) : |f(x)| \le g_2(x).$$

Ekkor f improprius értelemben integrálható I-n.

Bizonyítás. A fenti 4.9. Tétel szerint léteznek $a, b \in \mathbb{R}$, $\inf I < a < \alpha$ és $\beta < b < \sup I$ számok, hogy

$$\text{ha } \inf I < u < v < a, \text{ akkor } \left|\int_u^v g_1\right| = \int_u^v g_1 < \varepsilon,$$

és

$$\text{ha } b < u < v < \sup I, \text{ akkor } \left|\int_u^v g_2\right| = \int_u^v g_2 < \varepsilon.$$

Ebből a 3.30. Állítás és a 3.31. Következmény alapján $\inf I < u < v < a$ esetén

$$\left|\int_u^v f\right| \le \int_u^v |f| \le \int_u^v g_1 < \varepsilon,$$

és $b < u < v < \sup I$ esetén

$$\left|\int_u^v f\right| \le \int_u^v |f| \le \int_u^v g_2 < \varepsilon.$$

Így az állítás a 4.9. Tételből következik f-re. □

4.12. Példa.

$$f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$\forall x \in (-\infty, -1] : \mathrm{e}^{-x^2} \le \mathrm{e}^{x},\ \forall x \in [1, +\infty) : \mathrm{e}^{-x^2} \le \mathrm{e}^{-x}$$

4.13. Következmény. *Ha $f \in R^{loc}(I)$ és $|f|$ improprius értelemben integrálható I-n, akkor f is improprius értelemben integrálható I-n.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a fenti 4.11. Tételt tetszőleges $\alpha, \beta \in I$, $\inf I < \alpha \leq \beta < \sup I$ számokra és

$$g_1 := |f|\,|_{I\cap(-\infty,\alpha]} \text{ és } g_2 := |f|\,|_{I\cap[\beta,+\infty]}$$

függvényekre. □

4.14. Alkalmazás. Improprius integrál alkalmazásával igazolható az ún. *Stirling-formula*:

$$n! \sim n^n \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n},$$

ld. Császár IV.1.40.

5. Numerikus sorok

Legyen (a_n) számsorozat. Képezzük ebből a következő új számsorozatot:

$$s_1 := a_1,\ s_2 := a_1 + a_2,\ s_3 := a_1 + a_2 + a_3, \ldots, s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \ldots$$

Az új (s_n) sorozatot jelölje

$$\sum a_n =: (s_n),$$

ahol $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

5.1. Definíció. Az (a_n) sorozatból a fenti módon képezett $\sum a_n$ sorozatot az (a_n) sorozathoz tartozó (végtelen) *sor*nak nevezzük.

5.2. Definíció. Legyen $\sum a_n := (s_n)$, $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, ekkor az s_n számot a $\sum a_n$ sor n-edik *részletösszegé*nek vagy *szeleté*nek nevezzük (n-edik elem helyett). Ha létezik $\lim_{n\to\infty} s_n$, akkor ezt a véges vagy végtelen számot a $\sum a_n$ *sor összegé*nek nevezzük, és jelöljük:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor *konvergens*, ha $\lim_{n\to\infty} s_n$ létezik és véges. Minden más esetben (tehát ha ez a határérték végtelen vagy nem létezik) azt mondjuk, hogy $\sum a_n$ *divergens*.

5.3. Példa. Fontos példa végtelen sorra az ún. *geometriai sor*. Legyen $q \in \mathbb{R}$, $a_n := q^n$, és képezzük ebből a $\sum q^n$ sort. Ekkor az ismert azonosság alapján

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Világos, hogy (s_n) pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$ és ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}.$$

Ha $q \geq 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty,$$

ha pedig $q \leq -1$, a sornak nem létezik összege.

5.4. Tétel (Cauchy-kritérium sorok konvergenciájára). *A $\sum a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N(\varepsilon) = N \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > m \geq N$ esetén*

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a sorozatokra vonatkozó Cauchy-kritériumot az (s_n) sorozatra, ahol $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. □

5.5. Következmény. *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.*

Bizonyítás. A fenti 5.4. Cauchy-kritérium alapján $\sum a_n$ konvergenciájából következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N(\varepsilon) = N \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > N$ esetén ($m := n-1$ választással)

$$\left|\sum_{i=n}^{n} a_i\right| = |a_n| < \varepsilon,$$

ami épp az (a_n) sorozat 0-hoz tartását jelenti. □

Rögtön látni fogjuk, hogy a fenti következmény megfordítása nem igaz, tehát van olyan (a_n) 0-hoz tartó sorozat, hogy $\sum a_n$ nem konvergens. Tehát az (a_n) sorozat 0-hoz tartása szükséges, de nem elégséges feltétel a $\sum a_n$ sor konvergenciájához.

5.6. Állítás. *A*

$$\sum \frac{1}{n}$$

ún. harmonikus sor *divergens.*

Bizonyítás. Tetszőleges n esetén

$$\sum_{i=n+1}^{2n} a_i = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

ezért az 5.4. Cauchy-kritérium nem teljesülhet a harmonikus sorra $\varepsilon < \frac{1}{2}$ esetén. □

5.7. Definíció. A $\sum a_n$ sort *pozitív tagú sor*nak mondjuk, ha minden n-re $a_n \geq 0$.

5.8. Állítás. *Pozitív tagú sornak létezik összege. Ez pontosan akkor véges, vagyis a pozitív tagú sor pontosan akkor konvergens, ha a sor részletösszegeinek sorozata felülről korlátos.*

Bizonyítás. Ha $\sum a_n$ pozitív tagú, akkor a részletösszegeiből álló (s_n) sorozat monoton növő, ezért van határértéke. Ez pontosan akkor véges, ha a sorozat felülről korlátos (egyébként pedig $+\infty$). □

5.9. Definíció. A $\sum a_n$ sort *abszolút konvergens*nek mondjuk, ha a $\sum |a_n|$ konvergens.

5.10. Állítás. *Ha a $\sum a_n$ sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

Bizonyítás. Ellenőrizzük a Cauchy-kritériumot. Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $\sum |a_n|$ konvergens, ezért létezik hozzá $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > m \geq N$ esetén

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} |a_i|\right| = \sum_{i=m+1}^{n} |a_i| < \varepsilon.$$

Node a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=m+1}^{n} |a_i| < \varepsilon$$

is teljesül, amivel az állítást beláttuk. □

Hamarosan látni fogjuk, hogy az állítás megfordítása nem igaz – tehát van olyan konvergens sor, ami nem abszolút konvergens.

A következőkben igazolunk néhány, adott sor konvergenciájának eldöntésére szolgáló hasznos kritériumot.

5.11. Tétel (Összehasonlító kritérium). *Legyen $\sum a_n$ pozitív tagú sor.*

I. Ha létezik olyan pozitív tagú konvergens *$\sum b_n$ sor, hogy valamely $N \in \mathbb{N}$-re $a_n \leq b_n$ minden $n \geq N$ esetén, akkor $\sum a_n$ is konvergens.*

II. Ha létezik olyan pozitív tagú divergens *$\sum b_n$ sor, hogy valamely $N \in \mathbb{N}$-re $a_n \geq b_n$ minden $n \geq N$ esetén, akkor $\sum a_n$ is divergens.*

Bizonyítás. Mivel $\sum a_n$ pozitív tagú, ezért az 5.8. Állítás szerint konvergenciája ekvivalens a szeleteiből alkotott sorozat korlátosságával. Ebből a tétel következik. □

5.12. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium). *Legyen $\sum a_n$ pozitív tagú sor.*

I. Ha létezik $N \in \mathbb{N}$ és $0 < q < 1$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

akkor a sor konvergens.

II. Ha létezik $N \in \mathbb{N}$ és $q \geq 1$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$\sqrt[n]{a_n} \geq q,$$

akkor a sor divergens.

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy az I. esetben elég nagy n-re

$$a_n \leq q^n$$

ill. a II. esetben

$$a_n \geq q^n.$$

Így az 5.11. Tétel I. ill. II. esete alkalmazható a $\sum a_n$ és a $\sum q^n$ sorokra, amiből az állítás következik. □

5.13. *Megjegyzés.* A fenti tétel I. esete fennáll, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

II. esete fennáll, ha

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1.$$

5.14. Következmény. *Ha a $\sum a_n$ sor olyan, melyre*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

akkor a sor abszolút konvergens, így konvergens.

5.15. Tétel (D'Alambert-féle hányados-kritérium). *Legyen $\sum a_n$ olyan pozitív tagú sor, melyre $a_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.*

I. Ha létezik $N \in \mathbb{N}$ és $0 < q < 1$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

akkor a sor konvergens.

II. Ha létezik $N \in \mathbb{N}$ és $q \geq 1$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q,$$

akkor a sor divergens.

Bizonyítás. $n \geq N$-re az I. esetben

$$a_{n+1} < q \cdot a_n < q^2 \cdot a_{n-1} < \cdots < q^{n-N} \cdot a_N = \frac{a_N}{q^N} \cdot q^n,$$

a II. esetben

$$a_{n+1} > q \cdot a_n > q^2 \cdot a_{n-1} > \cdots > q^{n-N} \cdot a_N = \frac{a_N}{q^N} \cdot q^n.$$

Jelölje $c := \frac{a_N}{q^N}$ konstansot. Így az 5.11. Tétel I. ill. II. esete alkalmazható a $\sum a_n$ és a $c \cdot \sum q^n$ sorokra, amiből az állítás következik. □

5.16. *Megjegyzés.* A fenti tétel I. esete fennáll, ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

II. esete fennáll, ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

5.17. Következmény. *Ha a $\sum a_n$ sor olyan, melyre*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

akkor a sor abszolút konvergens, így konvergens.

5.18. Definíció. A $\sum a_n$ sort *váltakozó előjelű*nek mondunk, ha $a_1 > 0, a_2 < 0, a_3 > 0, \ldots,$ vagy fordítva, $a_1 < 0, a_2 > 0, a_3 < 0, \ldots$

5.19. Definíció. A $\sum a_n$ sor *Leibniz-sor*, ha váltakozó előjelű, és a tagok abszolút érkékeiből képezett $(|a_n|)$ sorozat szigorúan monoton fogyó és tart 0-hoz.

5.20. Tétel (Leibniz-tétel)**.** *Minden Leibniz-sor konvergens.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $a_1 > 0$ (tehát minden n-re $a_{2n+1} > 0$ és $a_{2n} < 0$). Könnyen látható, hogy a páratlan sorszámú részletösszegekből képezett (s_{2n+1}) sorozat szigorúan monoton fogyó, vagyis

$$s_1 > s_3 > \cdots > s_{2n+1} > \ldots,$$

a páros sorszámú részletösszegekből képezett (s_{2n}) sorozat pedig szigorúan monoton növő, vagyis

$$s_2 < s_4 < \cdots < s_{2n} < \ldots.$$

Így mindkét sorozatnak létezik határértéke, és mivel

$$s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \to 0, n \to \infty,$$

ezért ezek megegyeznek. Ebből következik, hogy $a := \lim_{n\to\infty} s_n$ is létezik, és mivel

$$s_1 > s_{2n+1} > s_{2n} \, \forall n,$$

ezért $a \in \mathbb{R}$. □

5.21. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ sor *feltételesen konvergens*, ha $\sum a_n$ konvergens, de $\sum |a_n|$ divergens, vagyis $\sum a_n$ nem abszolút konvergens.

5.22. Példa. A

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

sor feltételesen konvergens: mivel Leibniz-sor, ezért az 5.20. Tétel szerint konvergens, az abszolút értékeiből alkotott harmonikus sor viszont az 5.6. Állítás szerint divergens.

6. Függvénysorozatok, függvénysorok

6.1. Függvénysorozatok.

Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

6.1. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz hozzárendelünk egy $f_n : X \to \mathbb{R}$ függvényt. Az $n \mapsto f_n$ leképezést *függvénysorozat*nak nevezzük. Jelölésben $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vagy (f_n).

6.2. Definíció. Legyenek adva az $f : X \to \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvények. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat az *X halmazon pontonként tart az f függvényhez*, ha minden $x \in X$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ekkor az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt az (f_n) függvénysorozat *limeszfüggvényé*nek nevezzük, és jelöljük:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

6.3. Példa. Legyen $X := (-1{,}1]$, $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, ahol

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1{,}1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

6.4. Definíció. Legyen (f_n) tetszőleges függvénysorozat, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. E sorozat *konvergenciahalmaza* a

$$\mathrm{KH}(f_n) = \mathrm{KH} = \{x \in X : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergens}\}.$$

6.5. Példa. Legyen $X := \mathbb{R}$.

I. $f_n(x) := x^n$, $KH(f_n) = (-1{,}1]$;
II. $f_n(x) := \frac{\sin nx}{n}$, $KH(f_n) = \mathbb{R}$.

Gondoljuk meg, hogy mit jelent: (f_n) az X halmazon pontonként tart az f-hez?

$$\forall x \in X : f_n(x) \to f(x), n \to \infty$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in X\text{-re } \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon, x) = N : \forall n \geq N \text{ esetén } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

A következőkben bevezetünk egy olyan konvergenciafogalmat, ahol a fenti definícióban létező N küszöbindex nem függ x-től (csak ε-tól), vagyis ugyanaz az N jó az egész X halmazon.

6.6. Definíció. Legyenek adva az $f : X \to \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvények. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyeletesen tart f-hez az X halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon) = N : \forall n \geq N \text{ esetén } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in X\text{-re.}$$

Ezzel ekvivalens:

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon) = N : \forall n \geq N \text{ esetén } \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

amivel ekvivalens:

$$a_n := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0, n \to \infty. \tag{6.1}$$

Jelölésben:

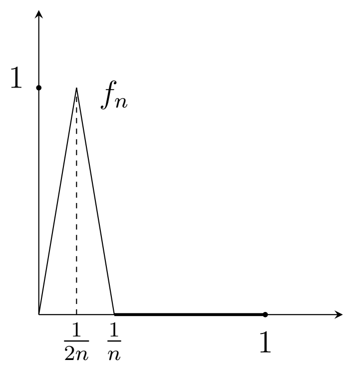
$$f_n \hookrightarrow f \quad X\text{-en.}$$

A definícióban szereplő ekvivalens megfogalmazások közül az utolsót, (6.1)-t használjuk a leggyakrabban konkrét függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának eldöntésére.

6.7. *Megjegyzés.* Ha $f_n \hookrightarrow f$ az X halmazon, akkor (f_n) pontonként is tart f-hez X-en.

6.8. Példa.

I. Legyen $X := [0,1]$ és definiáljuk a következő függvénysorozatot, ld. 1. ábra. Mivel



1. ábra. Példa pontonként de nem egyenletesen konvergens függvénysorozatra

minden $x \in [0,1]$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{N} < x$, ezért $f_n(x) = 0$, ha $n \geq N$, tehát $f_n(x) \to 0, n \to \infty$. Tehát $f_n \to f \equiv 0$ pontonként X-en. Másrészt világos, hogy

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0,$$

tehát (f_n) nem egyenletesen konvergens X-en.

II. Legyen $X := [0,1]$, $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. A 6.3. Példa alapján (f_n) pontonként konvergál X-en a

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

függvényhez. Másrészt

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$

tehát

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = 1 \not\to 0,$$

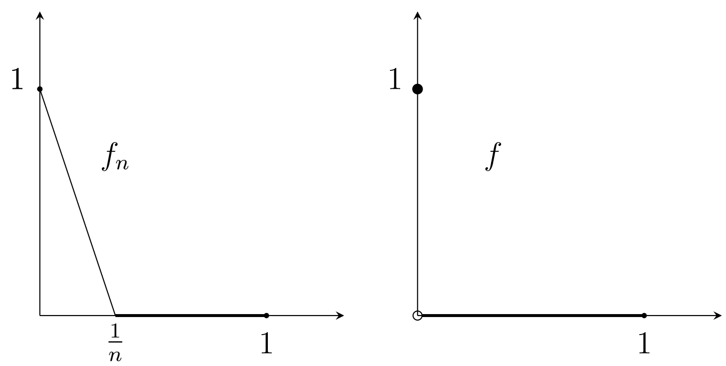
(f_n) nem egyenletesen konvergens.

Probléma. Az (f_n) függvénysorozat milyen tulajdonságai öröklődnek át a $\lim f_n$ függvényre?
Ha $f_n \to f$ pontonként, akkor vannak ellenpéldák.
Ha $f_n \hookrightarrow f$, akkor vannak tételek.

1. Folytonosság

Ellenpélda:

6.9. Példa. Tekintsük a 2. ábrát. Könnyen látható, hogy $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, minden n-re f_n folytonos, viszont f szakad 0-ban.



2. ábra. Példa pontonként konvergens folytonos függvények sorozatára, ahol a limeszfüggvény nem folytonos

6.10. Tétel. *Legyen (f_n) olyan függvénysorozat, melyre az $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvények folytonosak valamely $x_0 \in X$ pontban, valamint $f_n \hookrightarrow f$ X-en. Ekkor f is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Megmutatjuk, hogy van olyan $\delta > 0$ szám, melyre ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$. A 6.6. Definíció szerint $\varepsilon/3$-hoz találunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ minden $x \in X$ esetén, ha $n \geq N$. Speciálisan, $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ minden $x \in X$-re. Mivel f_N folytonos x_0-ban, azért $\varepsilon/3$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$. Megmutatjuk, hogy ez a δ jó f-hez. Legyen x olyan, hogy $|x - x_0| < \delta$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &\leq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

6.11. Következmény. *Legyen (f_n) olyan függvénysorozat, melyre az $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ függvények folytonosak az egész X halmazon, valamint $f_n \hookrightarrow f$ X-en. Ekkor f is folytonos X-en.*

2. Riemann-integrálhatóság

Probléma. Ha $I=[a,b]$ korlátos és zárt intervallum, (f_n) tagjai Riemann-integrálhatók I-n, $f_n \to f$. Igaz-e, hogy ekkor f is Riemann-integrálható I-n, ill. hogy $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$?

Ellenpéldák:

I. Rendezzük sorba a $[0,1]$ intervallumba eső racionális számokat:

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}.$$

Definiálja

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \\ 0, & \text{különben}, \end{cases}$$

vagyis az $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ halmaz karakterisztikus függvényét. Könnyen látható(!), hogy $f_n \in R[0,1]$. Másrészt $\lim_{n\to\infty} f_n = D$, ahol

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{különben}, \end{cases}$$

az ún. *Dirichlet-függvény.*

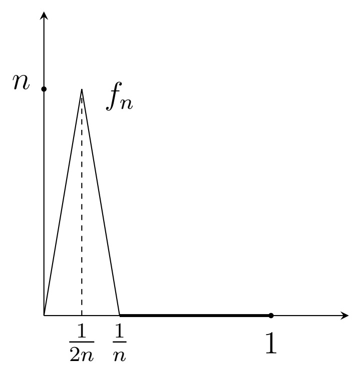
6.12. Állítás. *A Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható* $[0,1]$*-en.*

Bizonyítás. Mivel minden intervallumban van racionális és irracionális szám is, ezért a $D(x)$ függvény tetszőleges alsó közelítő összege 0 és tetszőleges felső közelítő összege 1. Tehát a 3.8. Definícióban szereplő Darboux-féle alsó és felső integrálokra

$$\int_{*0}^{1} D = 0 \text{ és } \int_0^{*1} D = 1,$$

ezért D nem Riemann-integrálható. □

II. Tekintsük a 3. ábrán látható függvénysorozatot. A 6.8.I. Példában meggondolt mó-



3. ábra. Ellenpélda Riemann-integrálhatóságra

don látható, hogy (f_n) pontonként (de nem egyenletesen) tart az $f\equiv 0$ függvényhez [0,1]-en. Másrészt f és minden n-re f_n is Riemann-integrálható [0,1]-en, és

$$\int_0^1 f_n = \frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \nrightarrow \int_0^1 f = 0,\ n\to\infty.$$

6.13. Tétel. *Legyen $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum, legyen (f_n) olyan függvénysorozat, melynek tagjai Riemann-integrálhatók $[a,b]$-n, és $f_n \hookrightarrow f$ az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor f is Riemann-integrálható $[a,b]$-n, valamint*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b f = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Bizonyítás. Ahhoz, hogy $f\in R[a,b]$ legyen, a 3.12. Tétel alapján elegendő, hogy minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\Phi=\Phi(\varepsilon)\in\mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi)<\varepsilon$. Legyen $\varepsilon>0$ rögzítve. Mivel $f_n\hookrightarrow f$, ezért ε-hoz létezik olyan $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\ge N$ esetén $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ minden $x\in[a,b]$ pontra. Speciálisan, $|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$ minden $x\in[a,b]$-re.
Másrészt ha $I\subseteq[a,b]$ tetszőleges intervallum, $x,y\in I$, akkor

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\le |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|\\ &\le \varepsilon+|f_N(x)-f_N(y)|+\varepsilon.\end{aligned}$$

Mindkét oldalon $x,y\in I$-ben szuprémumot véve kapjuk, hogy

$$\omega_f(I)=\sup_{x,y\in I}|f(x)-f(y)|\le 2\varepsilon+\sup_{x,y\in I}|f_N(x)-f_N(y)| = 2\varepsilon+\omega_{f_N}(I). \tag{6.2}$$

Mivel $f_N\in R[a,b]$, ezért $\varepsilon>0$-hoz találunk olyan $\Phi=\{I_1,I_2,\dots,I_n\}\in\mathcal{F}[a,b]$ felosztást, hogy $\Omega_{f_N}(\Phi)<\varepsilon$. Tekintsük f ezen felosztáshoz tartozó oszcillációs összegét. Ekkor a (6.2) becslés alapján

$$\begin{aligned}\Omega_f(\Phi)=\sum_{i=1}^n \omega_f(I_i)\cdot|I_i| &\le \sum_{i=1}^n (2\varepsilon+\omega_{f_N}(I_i))\cdot|I_i| = 2\varepsilon(b-a)+\sum_{i=1}^n\omega_{f_N}(I_i)\cdot|I_i|\\ &= 2\varepsilon(b-a)+\Omega_{f_N}(\Phi)<\varepsilon\cdot(2(b-a)+1).\end{aligned}$$

Ebből következik, hogy f Riemann-integrálható $[a,b]$-n.
Most igazoljuk, hogy $\int_a^b f_n\to\int_a^b f$, $n\to\infty$. Mivel $f_n\hookrightarrow f$, azért a (6.1) miatt

$$a_n:=\sup_{[a,b]}|f_n-f|\to 0,\ n\to\infty.$$

Ebből a 3.31. Következmény szerint

$$\left|\int_a^b f_n-\int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n-f)\right| \le \int_a^b |f_n-f| \le a_n\cdot(b-a)\to 0,\ n\to\infty.$$

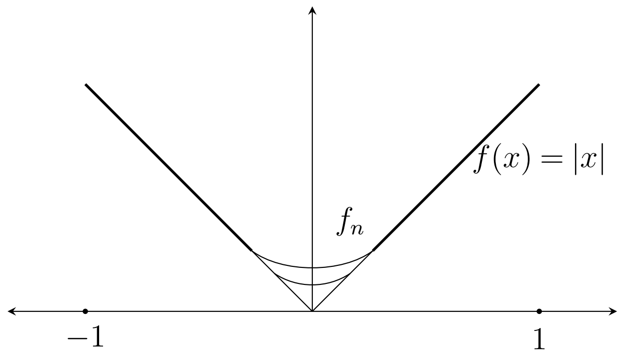
□

3. Differenciálhatóság

Probléma. Milyen feltételek mellett öröklődik a differenciálhatóság a limeszfüggvényre, feltéve, hogy az (f_n) függvénysorozat tagjai differenciálhatók?

Ellenpélda:

6.14. Példa. Tekintsük a 4. ábrán látható függvénysorozatot. Nyilvánvaló, hogy az f_n függvények differenciálhatók, és elérhető, hogy egyenletesen tartsanak az $f(x) = |x|$ függvényhez – ami viszont 0-ban nem differenciálható.



4. ábra. Példa differenciálható függvényekből álló sorozatra, ahol a limeszfüggvény nem differenciálható

Az előbbi példa alapján az egyenletes konvergenciától eltérő feltételeket kell tennünk a függvénysorozatra, hogy a differenciálhatóság megőrződjön a limeszfüggvényre.

6.15. Tétel. *Legyenek az (f_n) függvénysorozat tagjai az $I{=}[a,b]$ intervallumban folytonosan differenciálható függvények (vagyis minden f_n differenciálható és az f_n' folytonos I-ben), továbbá tegyük fel, hogy*

(i) $\exists x_0 \in I$, hogy az $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens;
(ii) $\exists g : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n' \hookrightarrow g$ I-n.

Ekkor létezik $f : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n \hookrightarrow f$, emellett $f' = g$.

Bizonyítás. Jelölje $c := \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$. Mivel f_n' folytonos $\forall n$ és $f_n' \hookrightarrow g$ I-ben, ezért a 6.11. Következmény szerint g is folytonos I-n. Jelölje

$$f(x) := c + \int_{x_0}^{x} g,\ x \in I. \tag{6.3}$$

Mivel g folytonos I-ben, ezért a 3.39. Tétel szerint integrálfüggvénye folytonosan differenciálható, így a fenti $f : I \to \mathbb{R}$ is folytonosan differenciálható, és

$$f'(x) = g(x) \text{ minden } x \in I\text{-re}. \tag{6.4}$$

Alkalmazzuk most a 3.24. Newton-Leibniz Tételt az f_n' függvényre (ez megtehető, mivel folytonos, tehát Riemann-integrálható, és van primitív függvénye, f_n):

$$\int_{x_0}^{x} f_n' = [f_n]_{x_0}^{x} = f_n(x) - f_n(x_0) \Rightarrow f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n' \quad \forall x \in I \tag{6.5}$$

Ha kivonjuk a (6.5) formulából a (6.3)-t, ennek abszolút értékére kapjuk a következő becslést a 3.31. és a 3.33. Következmények alapján:

$$\begin{aligned}|f_n(x)-f(x)| &\le |f_n(x_0)-c|+\left|\int_{x_0}^{x}(f_n'-g)\right| \le |f_n(x_0)-c|+\int_{x_0}^{x}|f_n'-g| \\ &\le |f_n(x_0)-c|+\int_a^b |f_n'-g| \le |f_n(x_0)-c|+\left(\sup_I |f_n'-g|\right)\cdot(b-a).\end{aligned}$$

Az így kapott becslés már x-től független, tehát

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \le |f_n(x_0)-c|+\left(\sup_I |f_n'-g|\right)\cdot(b-a)$$

is teljesül. Mivel $c=\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$, azért a jobb oldal 1. tagja 0-hoz tart, továbbá mivel $f_n' \hookrightarrow g$, a 2. tag is 0-hoz tart, ha $n\to\infty$. Ezzel a (6.1) alapján igazoltuk, hogy $f_n \hookrightarrow f$ az I-n. Másrészt (6.4) alapján $f'=g$ is teljesül I-ben, amivel a tételt beláttuk. □

6.16. Következmény. *Legyenek az (f_n) függvénysorozat tagjai az $I=[a,b]$ intervallumban folytonosan differenciálható függvények (vagyis minden f_n differenciálható és az f_n' folytonos I-ben), továbbá tegyük fel, hogy*

(i) $\exists f : I\to\mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n\to f$ pontonként I-ben;

(ii) $\exists g : I\to\mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n' \hookrightarrow g$ I-n.

Ekkor $f_n \hookrightarrow f$ is teljesül, emellett $f'=g$.

6.2. Függvénysorok.

Ebben az alfejezetben $X\subseteq\mathbb{R}$, $X\neq\emptyset$ halmazt jelöl.

6.17. Definíció. Legyenek az (f_n) függvénysorozat tagjai az X-en értelmezett függvények. Képezzük ebből a kövekező új függvénysorozatot:

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i,\ n=1,2,\dots, \tag{6.6}$$

azaz minden $x\in X$ esetén $s_n(x) := \sum_{i=1}^n f_i(x)$. Ezt az (s_n) függvénysorozatot az eredeti (f_n) függénysorozathoz tartozó *függvénysor*nak nevezzük, és jelöljük:

$$\sum f_n := (s_n).$$

A $\sum f_n$ függvénysor tehát annyi numerikus sor, ahány eleme van X-nek, ui. minden $x\in X$ esetén $\sum f_n(x)$ egy numerikus sor.

6.18. Definíció. Legyen $\sum f_n$ tetszőleges függvénysor. Ekkor a (6.6)-ben definiált s_n függvényt a függvénysor n. *szeleté*nek vagy *részletösszegé*nek nevezzük. Jelölje

$$\mathrm{KH} := \left\{x\in X : \exists \lim_{n\to\infty} s_n(x)\right\}.$$

Jelölje $f:\mathrm{KH}\to\mathbb{R}$ azt a függvényt, melyre

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} s_n(x), \quad x\in\mathrm{KH},$$

vagyis az (s_n) függvénysorozat limeszfüggvényét. Ekkor f-et a $\sum f_n$ függvénysor *összegfüggvényé*nek nevezük és jelöljük:

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

6.19. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\sum f_n$ függvénysor a $K \subset X$ halmazon *pontonként konvergens*, ha a sor szeleteiből álló (s_n) függvénysorozat pontonként konvergens K-n, vagyis létezik $f : K \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $x \in K$ esetén $s_n(x) \to f(x)$. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor a $K \subset X$ halmazon *egyenletesen konvergens*, ha létezik $f : K \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $s_n \hookrightarrow f$ a K-n. Mindkét esetben $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Probléma. Egy előre megadott $K \subset X$ halmazhoz van-e olyan függvénysor, melynek konvergenciahalmaza K? Legyen $g : X \to \mathbb{R}$ a következő függvény:

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x \in K; \\ 1, & x \notin K. \end{cases} \tag{6.7}$$

Ekkor a $\sum (-1)^n g$ függvénysor K-n konvergens, azon kívül nem.

A következőkben a függvénysorozatoknál megismertekhez hasonló állításokat mondunk ki arra vonatkozólag, hogy a függvénysor tagjainak milyen tulajdonságai és milyen feltételek mellett öröklődnek az összegfüggvényre.

6.20. Tétel. *Legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai az X halmazon értelmezett valós értékű függvények, és tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens X-en. Ha emellett valamely $x_0 \in X$ pontban a függvénysor minden tagja folytonos, akkor az $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. A feltételből következik, hogy az $s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i$ részletösszegek mindegyike folytonos x_0-ban. Így a 6.19. Definíció és a 6.10. Tétel alapján a bizonyítás kész. □

6.21. Következmény. *Legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai az X halmazon értelmezett valós értékű függvények, és tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens X-en. Ha emellett a függvénysor minden tagja folytonos az X halmazon, akkor az $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is folytonos X-en.*

6.22. Tétel. *Legyen $I := [a, b]$ korlátos és zárt intervallum, legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai az I intervallumon Riemann-integrálható függvények. Ha emellett a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens I-n, akkor az $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is Riemann-integrálható I-n, valamint*

$$\int_a^b f = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right).$$

Bizonyítás. Jelölje $s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i$ a függvénysor n. szeletét. Mivel minden f_i Riemann-integrálható $[a, b]$-n, azért a 3.27. Állítás alapján $s_n \in R[a, b]$. Továbbá $s_n \hookrightarrow f$ I-n, ezért a 6.13. Tételből következik, hogy $f \in R[a, b]$, valamint

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f.$$

□

6.23. Tétel. *Legyen $I = [a, b]$, legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai folytonosan differenciálhatók I-ben. Tegyük fel továbbá, hogy*

(i) $\exists x_0 \in I$ pont, melyben a $\sum f_n(x_0)$ numerikus sor konvergens;
(ii) a $\sum f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergens I-n.

Ekkor az eredeti $\sum f_n$ *függvénysor is egyenletesen konvergens* I*-n, emellett* $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jelöléssel* f *is folytonosan differenciálható* I*-n és*

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy a 6.15. Tétel feltételei teljesülnek a $\sum f_n$ függvénysor részletösszegeiből képezett (s_n) függvénysorozatra. Ez alapján az állítás könnyen belátható. □

6.24. Következmény. *Legyen* $I = [a, b]$*, legyenek a* $\sum f_n$ *függvénysor tagjai folytonosan differenciálhatók* I*-ben. Tegyük fel továbbá, hogy*

(i) a $\sum f_n$ *függvénysor pontonként konvergens* I*-ben;*
(ii) a $\sum f_n'$ *függvénysor egyenletesen konvergens* I*-n.*

Ekkor az eredeti $\sum f_n$ *függvénysor is egyenletesen konvergens* I*-n, emellett* $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *jelöléssel* f *is folytonosan differenciálható* I*-n és*

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

Probléma. Megadható-e jól használható feltétel arra nézve, hogy a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens legyen? (Függvénysorozatok esetén a (6.1) egy jól használható szükséges és elégséges feltétel.)

6.25. Állítás (Függvénysorok pontonkénti konvergenciájának Cauchy-féle feltétele)**.** *A* $\sum f_n$ *függvénysor pontosan akkor pontonként konvergens* X*-en, ha minden* $x \in X$ *esetén minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz található olyan* $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ *küszöbindex, hogy minden* $n > m \geq N$ *esetén*

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. A feltétel minden $x \in X$ esetén az $(s_n(x))$ számsorozat konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle kritérium, tehát a 6.19. Definíció alapján az állítás következik. □

6.26. Állítás (Függvénysorok egyenletes konvergenciájának Cauchy-féle feltétele)**.** *A* $\sum f_n$ *függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens* X*-en, ha minden* $\varepsilon > 0$ *számhoz található olyan* $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *küszöbindex, hogy minden* $n > m \geq N$ *esetén*

$$\sup_{x \in X} |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Az előző állítás és a 6.19. Definíció alapján rögtön következik. □

Az alábbi tétel a gyakorlatban a Cauchy-kritériumnál sokkal jobban használható.

6.27. Tétel (Weierstrass-féle kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára)**.** *Tegyük fel, hogy létezik egy* $\sum a_n$ *pozitív tagú, konvergens numerikus sor, melyre minden* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in X, \ \textit{vagyis} \ \sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq a_n.$$

Ekkor $\sum f_n$ *egyenletesen konvergens* X*-en.*
Azaz, ha a $\sum f_n$ *függvénysor tagjai majorálhatók* X*-en egy pozitív tagú konvergens numerikus sor megfelelő tagjaival, akkor a függvénysor egyenletesen konvergens* X*-en.*

Bizonyítás. Az 5.4. Tétel szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > m \geq N$ esetén

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon.$$

Így bármely $n > m \geq N$ indexekre

$$\sup_{x\in X} |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \sup_{x\in X} |f_{m+1}(x)| + \cdots + \sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon$$

is teljesül, amivel a 6.26. Cauchy-kritérium alapján a tételt beláttuk. □

6.28. Példa. Tekintsük a

$$\sum \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

függvénysort. Mivel minden n-re és minden valós x-re $|\frac{\sin nx}{n^{3/2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ és $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens, azért a függvénysor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en.

6.3. Kis kitérő.

6.29. Definíció. Legyen (a_n) tetszőleges számsorozat. Tekintsük ennek azon $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozatait, melyeknek létezik (véges vagy végtelen) határértéke. Jelölje

$$\mathrm{H} := \left\{ \lim_{k\to\infty} a_{n_k} : \exists \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \right\}.$$

$H \neq \emptyset$ (ld. Laczkovich-T. Sós jegyzet 5.8. Tétel). Definiálja

$$\limsup a_n := \sup H,$$

$$\liminf a_n := \inf H$$

véges vagy végtelen számokat.

6.30. *Megjegyzés.* Ha az (a_n) sorozatnak van határértéke, akkor

$$\lim a_n = \limsup a_n = \liminf a_n.$$

A $\limsup$ és $\liminf$ következő, könnyen látható tulajdonsága a továbbiakban nagyon hasznosnak fog bizonyulni.

6.31. Állítás. *Legyen (a_n) korlátos számsorozat.*

(i) Ha $c > \limsup a_n$, akkor létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n \leq c$.
(ii) Ha $c < \liminf a_n$, akkor létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n \geq c$.

Bizonyítás. Legyen $c > \limsup a_n$. Azt fogjuk belátni, hogy (a_n)-nek csak véges sok indexű tagja nagyobb c-nél. Tegyük fel indirekt, hogy végtelen sok sorozatelem nagyobb c-nél, vagyis létezik olyan $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata (a_n)-nek, melynek minden eleme nagyobb, mint c. A Laczkovich-T. Sós jegyzet fentebb is idézett 5.8. Tétele alapján $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$-nak létezik olyan (monoton) részsorozata, $(a_{n_{k_l}})$, melynek van határértéke, és a feltétel szerint a limesz nagyobb vagy egyenlő c-nél. Mivel ezen sorozat az eredeti sorozatnak is részsorozata, a $\limsup a_n$ definíciójával ellentmondásra jutottunk. A $\liminf$-re vonatkozó állítás hasonlóan látható. □

Most az előbbi állítás alapján kimondjuk a végtelen sorokra vonatkozó Cauchy-féle gyökkritérium egy másik változatát.

6.32. Tétel. *Legyen $\sum a_n$ pozitív tagú numerikus sor.*

(i) Ha $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens.
(ii) Ha $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$, akkor $\sum a_n$ divergens.

Ha $\limsup \sqrt[n]{a_n} = 1$, *akkor semmit sem tudunk mondani.*

Bizonyítás. (i) Legyen $\limsup \sqrt[n]{a_n} < 1$. Ekkor létezik olyan $0 < q < 1$ szám, melyre

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} < q < 1.$$

A 6.31.(i) Állítás alapján létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, vagyis az 5.12. Tétel alapján az állítást beláttuk.
(ii) Legyen $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$. Ekkor a 6.29. Definíció alapján $(\sqrt[n]{a_n})$-nek létezik olyan $(\sqrt[n_k]{a_{n_k}})$ részsorozata, melyre

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} > 1.$$

Ebből viszont következik, hogy az $(\sqrt[n_k]{a_{n_k}})$, így az (a_{n_k}) sorozatelemek is egy indextől kezdve nagyobbak, mint 1, tehát (a_n) nem tarthat 0-hoz. Az 5.5. Következmény alapján az állítás adódik, $\sum a_n$ nem lehet konvergens. □

7. Hatványsorok

7.1. Definíció. Legyenek $c_0, c_1, c_2, \ldots$ valós számok, $a \in \mathbb{R}$. Definiálja $f_n(x) := c_n(x-a)^n$, $n = 0,1,2,\ldots$. Ekkor a

$$\sum f_n$$

függvénysor neve *a középpű hatványsor.* A $c_0, c_1, c_2, \ldots$ számok a hatványsor *együtthatói.* A fenti hatványsor n-edik szelete

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i (x-a)^i$$

egy legfeljebb n-edfokú polinom.

Mostantól kezdve $a = 0$, tehát $\sum c_n x^n$ alakú hatványsorokkal foglalkozunk.

7.2. Példa.

$$\sum x^n$$

Itt $a = 0$, $c_0 = c_1 = c_2 = \cdots = 1$. Konvergenciahalmaza $\mathrm{KH} = (-1,1)$, összegfüggvénye

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Probléma. Milyen halmaz egy $\sum c_n x^n$ hatványsor konvergenciahalmaza? Láttuk a (6.7)-ben, hogy egy függvénysor konvergenciahalmaza tetszőleges halmaz lehet. Világos, hogy minden ilyen hatványsor 0-ban konvergens: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n 0^n = c_0$. Kiderül, hogy a $\sum c_n x^n$ hatványsor konvergenciahalmaza mindig egy 0 középpű intervallum.

7.3. Definíció. Tetszőleges $\sum c_n x^n$ hatványsor esetén jelölje

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} \tag{7.1}$$

a *Cauchy-Hadamard képlet*et. Megállapodunk, hogy $\frac{1}{+\infty} := 0$ (mint mindig), $\frac{1}{0} := +\infty$ (csak itt).

A következő tétel a hatványsorok elméletének egyik legfontosabb állítása.

7.4. Tétel (Cauchy-Hadamard-Abel). *A $\sum c_n x^n$ hatványsor konvergenciahalmaza minden esetben egy 0 középű, R sugarú nyílt, zárt vagy félignyílt intervallum, ahol R a (7.1) szerint van definiálva. Emellett a hatványsor ($R \neq 0$ esetén) minden $x \in (-R, R)$ pontban abszolút konvergens, vagyis $\sum |c_n x^n|$ konvergens.*

7.5. *Megjegyzés.* $R = 0$ esetén $\mathrm{KH} = \{0\}$; $R = +\infty$ esetén $\mathrm{KH} = (-\infty, +\infty)$; $0 < R < \infty$ esetén $\mathrm{KH} = (-R, R)$ vagy $\mathrm{KH} = [-R, R]$ vagy $\mathrm{KH} = (-R, R]$ vagy $\mathrm{KH} = [-R, R)$.

Bizonyítás. A bizonyítást 3 lépesre bontjuk R lehetséges értékei szerint.
1. $R = 0$ eset. Ekkor definíció szerint $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$. Így tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \left(\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \right) = +\infty,$$

tehát a 6.32. Tétel (*ii*) pontjának bizonyításában meggondoltakhoz hasonlóan a $(|c_n x^n|)$ sorozatelemek közül végtelen sok nagyobb 1-nél, vagyis $\sum c_n x^n$ nem lehet konvergens. Ezért $\mathrm{KH} = \{0\}$.
2. $R = +\infty$ eset. Ekkor definíció szerint $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 0$. Így tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \left(\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \right) = 0 < 1,$$

tehát a 6.32. Tétel szerint a $\sum c_n x^n$ sor abszolút konvergens. Így $\mathrm{KH} = (-\infty, +\infty)$.
3. $0 < R < \infty$ eset. Ha $|x| < R$, akkor

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \left(\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \right) = \frac{|x|}{R} < 1,$$

tehát a $\sum c_n x^n$ sor abszolút konvergens. Másrészt ha $|x| > R$, akkor

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot \left(\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \right) = \frac{|x|}{R} > 1,$$

tehát a $(|c_n x^n|)$ sorozatelemek közül végtelen sok nagyobb 1-nél, vagyis $\sum c_n x^n$ nem lehet konvergens. ☐

Probléma. Mit lehet mondani a $\sum c_n x^n$ hatványsor egyenletes konvergenciájáról? Három állítást fogalmazunk meg, az utolsót nem bizonyítjuk.

7.6. Tétel. *Ha a $\sum c_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $R = +\infty$, akkor minden $r > 0$ mellett a hatványsor egyenletesen konvergens a $[-r, r]$ korlátos és zárt intervallumon.*

Bizonyítás. A 7.4. Tétel alapján a $\sum c_n x^n$ hatványsor abszolút konvergens az $x = r$ pontban, vagyis a $\sum |c_n| r^n$ konvergens numerikus sor. Másrészt tetszőleges $x \in [-r, r]$ esetén $|x| \leq r$, így

$$|c_n x^n| \leq |c_n| r^n.$$

Tehát a 6.27. Weierstrass-kritérium alapján $\sum c_n x^n$ egyenletesen konvergens $[-r, r]$-en. ☐

7.7. Tétel. *Legyen a $\sum c_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara $0 < R < +\infty$, és legyen $0 < \delta < R$. Ekkor a hatványsor egyenletesen konvergens a $[-R + \delta, R - \delta]$ korlátos és zárt intervallumon.*

Bizonyítás. A 7.4. Tétel alapján a $\sum c_n x^n$ hatványsor abszolút konvergens az $x = R - \delta$ pontban, vagyis a $\sum |c_n| \cdot (R - \delta)^n$ konvergens numerikus sor. Másrészt tetszőleges $x \in [-R + \delta, R - \delta]$ esetén $|x| \leq R - \delta$, így

$$|c_n x^n| \leq |c_n| \cdot (R - \delta)^n.$$

Tehát a 6.27. Weierstrass-kritérium alapján $\sum c_n x^n$ egyenletesen konvergens az $[-R+\delta, R-\delta]$ intervallumon. $\square$

7.8. Tétel. *Legyen a* $\sum c_n x^n$ *hatványsor konvergenciasugara* $0 < R < +\infty$, *és legyen* $0 < \delta < R$.

(i) Ha $\mathrm{KH} = (-R, R]$, *akkor* $\sum c_n x^n$ *egyenletesen konvergens a* $[-R+\delta, R]$ *korlátos és zárt intervallumon.*
(ii) Ha $\mathrm{KH} = [-R, R)$, *akkor* $\sum c_n x^n$ *egyenletesen konvergens a* $[-R, R-\delta]$ *korlátos és zárt intervallumon.*
(iii) Ha $\mathrm{KH} = [-R, R]$, *akkor* $\sum c_n x^n$ *egyenletesen konvergens az egész* $[-R, R]$ *konvergenciahalmazon.*

Bizonyítás. Az előző tétel bizonyításának menete ott bukik meg, hogy nem tudjuk, $x = R$-ben ill. $x = -R$-ben abszolút konvergens-e a hatványsor (csak konvergenciát tudunk), ezért a Weierstrass-kritérium nem alkalmazható a fenti módon. A bizonyításhoz az ezen jegyzetben ki nem mondott Abel-féle egyenletes konvergencia-kritériumra van szükség. $\square$

7.9. Következmény. *A* $\sum c_n x^n$ *hatványsor egyenletesen konvergens a konvergenciahalmaz (konvergenciaintervallum) tetszőleges korlátos és zárt részintervallumán. (Ui. minden ilyen belefoglalható egy, a fenti állításokban szereplő intervallumba.)*

Ezek után választ tudunk adni arra a kérdésre, hogy milyen tulajdonságú lesz egy hatványsor összegfüggvénye.

7.10. Tétel. *A* $\sum c_n x^n$ *hatványsor összegfüggvénye az egész* KH *konvergenciaintervallumon folytonos függvény. (Természetesen, ha a konvergenciaintervallum valamelyik végpontja is hozzátartozik* KH*-hoz, akkor ott az összegfüggvénynek csak egyoldali folytonosságáról beszélhetünk.)*

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in \mathrm{KH}$ tetszőleges pont. Ezt nyilván tartalmazza, egy, a KH-ban lévő korlátos és zárt intervallum. Így az állítás adódik a 6.20. Tételből és a 7.9. Következményből, mivel a hatványsor tagjai hatványfüggvények, így folytonosak x_0-ban. $\square$

7.11. Tétel. *Legyen* $\sum c_n x^n$ *tetszőleges hatványsor, jelölje* f *az összegfüggvényét* KH*-ban, azaz* $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in \mathrm{KH}$. *Ekkor az* f *összegfüggvény minden* $[a, b] \subset \mathrm{KH}$ *korlátos és zárt intervallumon Riemann-integrálható (ugyanis az előző tétel alapján folytonos), emellett*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b c_n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1},$$

azaz az összegfüggvény integrálja tagonkénti integrálással nyerhető.

Bizonyítás. Rögtön adódik a 6.22. Tételből és a 7.9. Következményből, mivel a hatványsor tagjai hatványfüggvények, így Riemann-integrálhatók $[a, b]$-n. $\square$

A továbbiakban megvizsgáljuk, milyen összefüggés van a hatványsor összegfüggvényének deriváltja(i) és a tagonkénti deriválással nyert újabb hatványsor között.

7.12. Lemma. *Legyen* $\sum c_n x^n$ *tetszőleges hatványsor, tekintsük a tagonkénti differenciálással nyert új függvénysort,*

$$\sum c_n n x^{n-1} = \sum c_{n+1}(n+1)x^n,$$

ami maga is hatványsor, az eredeti derivált hatványsora. *A derivált hatványsor konvergenciasugara azonos az eredeti hatványsor konvergenciasugarával.*

Bizonyítás. Ugyanis

$$\limsup \sqrt[n]{|c_{n+1}(n+1)|} = \left(\limsup \sqrt[n]{|c_{n+1}|}\right) \cdot \left(\limsup \sqrt[n]{n+1}\right) = \limsup \sqrt[n]{|c_n|} \cdot 1.$$

□

7.13. Példa. Tekintsük a

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

hatványsort. Ennek konvergenciasugara

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|}} = \frac{1}{\limsup \frac{1}{\sqrt[n]{n}}} = 1.$$

Konvergenciahalmaza a $(-1,1]$ intervallum, mivel $x = 1$-ben egy Leibniz-sort kapunk, ami konvergens; $x = -1$-ben viszont a sor

$$\sum \left(-\frac{1}{n}\right),$$

ami nyilvánvalóan divergens. A derivált hatványsor

$$\sum (-1)^n x^n$$

konvergenciahalmaza viszont csak a $(-1,1)$ intervallum.

7.14. Tétel. *Legyen $\sum c_n x^n$ olyan hatványsor, melyre $R > 0$, jelölje f az összegfüggvényét* KH*-ban, azaz $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in$ KH. Ekkor az f összegfüggvény a $(-R, R)$ intervallumban differenciálható, emellett*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(n+1)x^n, \quad x \in (-R, R),$$

tehát az összegfüggvény deriváltja a derivált hatványsor összegfüggvénye.

Bizonyítás. Elég, ha az állítás belátjuk tetszőleges $[-R+\delta, R-\delta]$ korlátos és zárt intervallumra. Mivel a hatványsor tagjai hatványfüggvények, így folytonosan differenciálhatók $[-R+\delta, R-\delta]$-n. A $\sum f_n' = \sum c_{n+1}(n+1)x^n$ derivált hatványsor egyenletesen konvergens $[-R+\delta, R-\delta]$-n, mert a 7.12. Lemma szerint konvergenciasugara R, így alkalmazható a 7.9. Következmény. Mivel az eredeti hatványsor pontonként konvergens az egész $(-R, R)$-en, ebből az állítás adódik a 6.23. Tétel szerint. □

Az alábbi tételben azt használjuk ki, hogy a hatványfüggvények akárhányszor is (folytonosan) differenciálhatók.

7.15. Következmény. *Legyen $\sum c_n x^n$ olyan hatványsor, melyre $R > 0$, jelölje f az összegfüggvényét* KH*-ban, azaz $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $x \in$ KH. Ekkor az f összegfüggvény a $(-R, R)$ intervallumban akárhányszor differencálható, emellett minden $k \in \mathbb{N}$ esetén*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}, \quad x \in (-R, R).$$

Bizonyítás. Az előbbi tételt alkalmazzuk k-szor. A 7.12. Lemmából adódik, hogy az összefüggés $(-R, R)$-en fennáll. □

A fenti elmélet segítségével ismert hatványsorokból integrálás és differenciálás útján új hatványsorok nyerhetők.

7.16. Példa. Tekintsük a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\bigg|_{(-1,1)} \tag{7.2}$$

hatványsor-összeget. Deriválással a 7.14. Tételből:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\frac{1}{1-x}\bigg|_{(-1,1)}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\bigg|_{(-1,1)}.$$

A (7.2) összefüggésben x helyére $(-t)$-t írva kapjuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}\bigg|_{(-1,1)}.$$

Legyen $x \in (-1,1)$, és integráljunk $[0,x]$-en (ill. $[x,0]$-n). Ekkor a 7.11. Tétel szerint

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^n\,dt,$$

amiből

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad x \in (-1,1),$$

vagyis

$$\ln(1+x)\bigg|_{(-1,1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

A jobb oldalon álló hatványsor konvergenciahalmaza azonban $(-1,1]$, hiszen $x=1$ esetén a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

sort kapjuk, ami Leibniz-sor, tehát konvergens ($x{=}-1$-ben a $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ nyilván divergens). Másrészt $\ln(1+1) = \ln 2$. Az előzőekből nem látható, hogy

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{7.3}$$

teljesül-e. Node tudjuk a 7.10. Tételből, hogy a hatványsor összegfüggvénye az egész konvergenciahalmazon folytonos függvény, vagyis $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ (balról) folytonos $x=1$-ben is. Mivel az összegfüggvény $(-1,1)$-en $\ln(1+x)$, ezért ebből következik, hogy $x=1$-ben $\ln 2$ értéket kell felvegyen, tehát a (7.3) összefüggés fennáll.

7.17. Példa. Írjunk a (7.2) összefüggésben x helyére $(-t^2)$-et. Ekkor

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}\bigg|_{(-1,1)}.$$

Legyen $x \in (-1,1)$, és integráljunk $[0,x]$-en (ill. $[x,0]$-n). Ekkor a 7.11. Tétel szerint

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}\,dt,$$

amiből

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

A fenti meggondoláshoz hasonlóan kapjuk, hogy az összefüggés az egész $[-1,1]$ intervallumon teljesül. $x = 1$-et véve:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

A továbbiakban a közepű hatványsorokat vizsgálunk. Ezek elmélete könnyen visszavezethető a 0 közepű hatványsorok elméletére, hiszen a

$$\sum c_n (x-a)^n \tag{7.4}$$

összefüggésben $\xi := x - a$-t helyettesítve a $\sum c_n \xi^n$ egy 0 közepű hatványsor a ξ változóban. A

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

jelölést bevezetve a (7.4) hatványsor abszolút konvergens, ha $|\xi| = |x-a| < R$ és divergens, ha $|\xi| = |x-a| > R$, ld. a 7.4. Tételt. A végpontokban általánosságban nem tudjuk.

7.18. Tétel. *A $\sum c_n (x-a)^n$ alakú hatványsor konvergenciahalmaza egy a közepű R sugarú nyílt, zárt vagy félignyílt intervallum, tehát $(a-R, a+R)$ vagy $[a-R, a+R]$ vagy $(a-R, a+ +R]$, vagy $[a-R, a+R)$. Továbbá a sor $x \in (a-R, a+R)$ esetén abszolút konvergens.*

Bizonyítás. Következik a 7.4. Tételből. □

7.19. Tétel. *Jelölje $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ a hatványsor összegfüggvényét. Ekkor f folytonos az egész* KH *konvergenciaintervallumban. Továbbá f akárhányszor differenciálható a nyílt $(-R, R)$ intervallumon és $k \in \mathbb{N}$-re*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)\dots(n-k+1)(x-a)^{n-k}, \quad x \in (-R, R). \tag{7.5}$$

Másrészt f Riemann-integrálható KH *tetszőleges korlátos és zárt $[b, d]$ részintervallumán, és*

$$\int_b^d f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_b^d (x-a)^n\,dx.$$

Bizonyítás. Következik a 7.10., a 7.11. és a 7.14. Tételekből. □

Probléma. Hogy lehet felismerni egy f, az a pont egy környezetében értelmezett függvényről, hogy egy a közepű hatványsor összegfüggvénye? Világos, hogy szükséges feltétel f akárhányszor való differenciálhatósága. Később látni fogjuk, hogy a feltétel nem elégséges!

7.20. Állítás. *Tegyük fel, hogy f értelmezve van az a pont egy δ sugarú környezetében, és f előáll $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ alakban (amiből már következik, hogy f akárhányszor differenciálható e környezetben). Ekkor*

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \tag{7.6}$$

vagyis

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\quad x\in(a-\delta,a+\delta). \tag{7.7}$$

Bizonyítás. A (7.5) képlet szerint

$$f^{(k)}(x)=c_k k!+c_{k+1}(k+1)k\cdots 2\cdot(x-a)+c_{k+2}(k+2)(k+1)\cdots 3\cdot(x-a)^2+\dots,$$

amiből $f^{(k)}(a)=c_k k!$, $k=0,1,2,\dots$. Így (7.6) következik. □

Tehát, ha f előáll hatványsor alakban, akkor a hatványsor együtthatói f a pontbeli deriváltjaiból kiszámíthatók, és az előállítás szükségképpen (7.7) alakú. Világos, hogy ez a hatványsor tetszőleges, a-ban akárhányszor differenciálható függvényre felírható – csak nem biztos, hogy a sor konvergens lesz a egy környezetében és nem biztos, hogy előállítja f-et!

7.21. Definíció. Legyen f akárhányszor differenciálható az a pontban. Ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{7.8}$$

hatványsort az f függvény *Taylor-sor*ának nevezük. E hatványsor n. szelete az f függvény a pont körüli n. *Taylor-polinom*ja,

$$T_n^f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

A 7.20. Állítás előtt felvetett probléma megválaszolásához tehát azt a kérdést kell megvizsgálnunk, hogy mely függvények esetén konvergens a (7.8) hatványsor, és mikor lesz az összegfüggvénye f (az a pont egy környezetében.)

7.22. Példa. Tekintsük az

$$f(x):=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

függvényt. Ez az egész számegyenesen akárhányszor differenciálható, a 0-ban akárhanyadik deriváltja 0. Ezért a (7.8) Taylor-sorban $a=0$ esetén minden együttható 0, így f nem állhat elő 0 körüli hatványsor összegeként az $x=0$-t kivéve.

A félév elején belátott *Taylor-formula* segítségével kaphatunk elégséges feltételt arra, hogy egy akárhányszor differenciálható függvény mikor áll elő hatványsor alakjában.

7.23. Tétel. *Legyen f olyan függvény, melyre teljesülnek az alábbi feltételek:*

(i) f akárhányszor differenciálható az a pont egy $U:=(a-\delta,a+\delta)$ környezetében;

(ii) léteznek olyan $A,B>0$ állandók és $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n\geq N$ és $x\in U$ esetén

$$|f^{(n)}(x)|\leq An!\,B^n. \tag{7.9}$$

Ekkor f az a pont $r:=\min\left\{\delta,\frac{1}{B}\right\}$ sugarú környezetében előáll hatványsor alakban, és a 7.20. Állítás szerint ez a függvény Taylor-sora:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\quad x\in(a-r,a+r).$$

Bizonyítás. Az (1.5) összefüggés alapján a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

hatványsor (Taylor-sor) n. részletösszegének, vagyis f n. Taylor-polinomjának és f-nek különbségére kapjuk, hogy létezik $c \in (x,a)$ (vagy $c \in (a,x)$), melyre

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \le \frac{A(n+1)!\, B^{n+1}}{(n+1)!}|x-a|^{n+1},$$

a (7.9) feltétel szerint. Ebből

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \le A \cdot (B|x-a|)^{n+1}.$$

Tehát $B|x-a| < 1$, vagyis $|x-a| < 1/B$ esetén a jobb oldal 0-hoz tart, ha $n \to \infty$, vagyis a Taylor-sor konvergens és előállítja f-et. □

7.24. Példa. Az első évben megismert nevezetes függvények $a = 0$ körüli Taylor-polinomjaiból könnyen felírhatjuk a 0 körüli Taylor-sorukat. Mindhárom alábbi példa esetén azt kapjuk, hogy a fenti tétel feltétele teljesül a 0 bármely környezetében elég nagy n-re, tehát a Taylor-sorok előállítják a megfelelő függvényeket az egész számegyenesen.

I.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Itt a (7.9) becslésre $|f^{(n)}(x)| = |\mathrm{e}^x| \le \mathrm{e}^\delta$ adódik $x \in (-\delta, \delta)$ esetén. Legyen $A := \mathrm{e}^\delta$, $B := 1/\delta$. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} n!\, B^n = +\infty,$$

azért elég nagy n-re $n!\, B^n > 1$ és így

$$|f^{(n)}(x)| \le \mathrm{e}^\delta \le An!\, B^n.$$

Ebből kapjuk, hogy a Taylor-sor előállítja a függvényt az egész $(-\delta, \delta)$ intervallumon.

II.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Itt a (7.9) becslésre $|f^{(n)}(x)| = |\sin x|$ vagy $|f^{(n)}(x)| = |\cos x|$, amiből $|f^{(n)}(x)| \le 1$ adódik $x \in (-\delta, \delta)$ esetén, tehát $A := 1$, $B := 1/\delta$. A fenti I. meggondolással látható, hogy a Taylor-sor előállítja a függvényt az egész $(-\delta, \delta)$ intervallumon.

III.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

Itt a (7.9) becslésre $|f^{(n)}(x)| = |\sin x|$ vagy $|f^{(n)}(x)| = |\cos x|$, amiből $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ adódik $x \in (-\delta, \delta)$ esetén. A Taylor-sor előállítás most már ugyanúgy következik, mint a II. pont alatt.