ANALÍZIS IV. ELŐADÁSJEGYZET

SIKOLYA ESZTER

1. Differenciálegyenletek

Radioaktív anyag bomlása (vagy szaporodás)

$$
\begin{aligned}
y'(t) &= k \cdot y(t) \\
\frac{y'(t)}{y(t)} &= k \\
\ln|y(t)| &= k \cdot t + \ln c, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad / \exp(\cdot) \\
|y(t)| &= c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}^+ \\
y(t) &= c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

1.1. Állítás. *Minden olyan differenciálható $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez, melyre $y' = k \cdot y$, létezik $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Legyen

$$\varphi(t) := y(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt}.$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = y'(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} - ky(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} = ky(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} - ky(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} = 0,$$

tehát φ konstans. □

Általánosítva a fenti problémát, keressük azokat az $y(x)$, az I intervallumon értelmezett differenciálható függvényeket, melyekre teljesül, hogy

$$y'(x) = f(x)y(x), \tag{1.1}$$

ahol $f \in C(I)$. Világos, hogy ha F egy primitív függvénye f-nek (minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, ld. Analízis III. jegyzet 2.8. Tétel), akkor

$$y(x) := c \cdot \mathrm{e}^{F(x)}, \quad x \in I$$

megoldás tetszőleges c valós szám esetén. A fenti 1.1. Állítás bizonyításával analóg módon látható, hogy csak ilyen alakú megoldások léteznek.

1.2. Példa.

$$y'(x) = x \cdot y(x)$$

Date: 2007. május 24..

Kezdetiérték-feladat megoldása
Keresünk olyan differenciálható $y : I \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x) \cdot y(x), \quad x \in I \\ y(x_0) &= y_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Válasszunk f-nek olyan F primitív függvényét, melyre $F(x_0) = 0$ (ez megtehető, konstans hozzáadásával), és legyen $c := y_0$. Ekkor

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{F(x)} = y_0 \cdot \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} f(t)\, dt}$$

jó megoldás.

1.3. Példa.

$$\begin{cases} y'(x) = x \cdot y(x), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Inhomogén lineáris differenciálegyenlet

Keressük azokat az $y(x)$, az I intervallumon értelmezett differenciálható függvényeket, melyekre teljesül, hogy

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x),$$

ahol $f, g \in C(I)$. Megszorozva az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges $\rho(x)$ differenciálható függvénnyel kapjuk, hogy

$$y'(x)\rho(x) - \rho(x)f(x)y(x) = \rho(x)g(x).$$

Ha elérjük, hogy

$$\rho(x)f(x) = -\rho'(x) \tag{1.2}$$

legyen, akkor a kapott egyenlet

$$[y(x)\rho(x)]' = \rho(x)g(x)$$

alakúvá egyszerűsödik. Az (1.1) megoldásából kapjuk (1.2)-re, hogy

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{-F(x)}$$

egy jó megoldás, ahol F a f egy primitív függvénye. Ebből, mivel $\rho \cdot g \in C(I)$, vagyis Riemann-integrálható is,

$$\begin{aligned} [y(x)\rho(x)]' &= \rho(x)g(x) \\ y(x)\rho(x) &= c + \int_{x_0}^{x} \rho(t)g(t)\, dt \\ y(x) &= c \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + \mathrm{e}^{F(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-F(t)} g(t)\, dt \\ &= c \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{F(x)-F(t)} g(t)\, dt, \end{aligned}$$

ahol $x_0 \in I$ tetszőleges.

Ha kezdeti érték is adva van, vagyis $y(x_0) = y_0$, akkor válasszuk ismét F-et úgy, hogy $F(x_0) = 0$ legyen, vagyis $F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, és $c := y_0$. Ekkor

$$y(x_0) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{F(x_0)} + \mathrm{e}^{F(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} \mathrm{e}^{-F(t)} g(t)\,dt = y_0.$$

1.4. Példa.

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^x, \\ y(1) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

Keressük azokat az $y : I \to J$ intervallumon értelmezett differenciálható függvényeket, melyekre teljesül, hogy

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)),$$

ahol $f \in C(I)$, $g \in C(J)$. Tegyük fel, hogy $0 \notin R(g)$. Ekkor

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Ha G a $\frac{1}{g}$ egy primitív függvénye, vagyis $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\,dt$, akkor mindkét oldalt integrálva

$$G(y(x)) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Szerencsés esetben ebből $y(x)$ kifejezhető.

1.5. Példa.

$$y^2(x) \cdot y'(x) = 1 - 2x$$

2. Metrikus terek

2.1. Alapfogalmak, nyílt és zárt halmazok. *Alapötlet:* Az $(x, y) \mapsto |x - y|$ hozzárendelés az x és y valós számok **távolságá**t adja meg. Ezt általánosíthatjuk $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorokra úgy, hogy

$$|x - y| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2},$$

amit az x és y pontok **euklideszi távolságá**nak nevezünk.
A továbbiakban tovább általánosítjuk a távolság fogalmát.

2.1. Definíció. Legyen $X \neq \emptyset$ nem üres halmaz. Ekkor X-beli *metrika* vagy *távolságfüggvény* alatt egy olyan $d : X \times X \to [0, +\infty)$ leképezést értünk, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

(i) $\forall x, y \in X$ esetén $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (reflexivitás);
(ii) $\forall x, y \in X$ esetén $d(x, y) = d(y, x)$ (szimmetrikusság);
(iii) $\forall x, y, z \in X$ esetén $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (háromszög-egyenlőtlenség).

2.2. Definíció. A *metrikus tér* egy olyan (X, d) rendezett pár, ahol X nem üres alaphalmaz, d pedig X-beli metrika.

2.3. Példák (metrikus terekre).

1. $X := \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$,

$$d_p(x,y) := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.1}$$

   $p = 2$ eset: *euklideszi metrika*;

2. $X := \mathbb{R}^n$,

$$d_\infty(x,y) := \max_{k \in \{1,\ldots,n\}} |x_k - y_k|;$$

3. $X \neq \emptyset$ tetszőleges,

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq y; \\ 0, & \text{ha } x = y. \end{cases}$$

   diszkrét metrika.

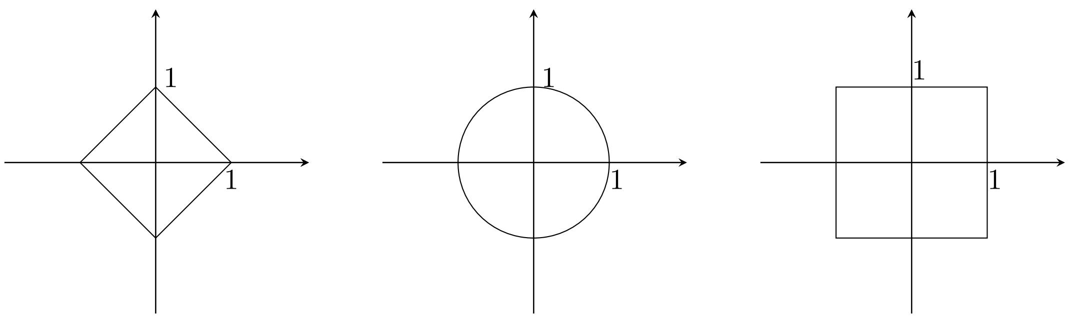
2.4. Definíció. Az (X,d) metrikus térben az $u \in X$ pont körüli $r > 0$ sugarú

(a) *nyílt gömb:* $B(u,r) := \{x \in X : d(u,x) < r\}$;
(b) *zárt gömb:* $\bar{B}(u,r) := \{x \in X : d(u,x) \leq r\}$;
(c) *gömbfelület:* $\partial B(u,r) := \{x \in X : d(u,x) = r\}$;
(d) *kipontozott gömb(környezet):* $\dot{B}(u,r) := B(u,r) \setminus \{u\}$.

2.5. Definíció. Az u pont r *sugarú környezetén* a $B(u,r)$ nyílt gömböt értjük.

2.6. Példák (gömbökre).

1. Az alábbi ábrán az $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ és $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ terekben a (0,0) pont (origó) körüli 1 sugarú gömbök láthatók.



1. ábra. Origó körüli egységgömbök a d_1, d_2 és d_∞ metrikákban

2. Ha (X,d) a diszkrét metrikus tér egy tetszőleges alaphalmazon, akkor

$$B(u,r) = \begin{cases} \{u\}, & r \leq 1; \\ X, & r > 1. \end{cases}$$

2.7. Definíció. Legyen $(x_n) \subset (X,d)$ pontsorozat, $u \in X$. Azt mondjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = u$ vagy $x_n \to u$, vagyis az (x_n) sorozat u-hoz *konvergál*, ha $d(x_n, u) \to 0$.

2.8. *Megjegyzés.* Sorozat határértéke egyértelmű.

Bizonyítás. Ha $x_n \to u$ és $x_n \to v$ lenne és $u \neq v$, akkor $r := \frac{d(u,v)}{2} > 0$ definícióval $B(u,r) \cap$ $\cap B(v,r) = \emptyset$, ami ellentmond a konvergenciának (egy indextől kezdve a sorozat tagjai mindkét gömbben benne kellene legyenek). $\square$

2.9. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér, $H \subset X$, $u \in X$.

1. Az u pont *belső pontja* H-nak, ha
$$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u,r) \subset H$$
(ebből persze következik, hogy $u \in H$). H belső pontjait jelölje $\mathrm{int}H$.
2. Az u pont *külső pontja* H-nak, ha
$$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u,r) \subset X \setminus H$$
(ebből persze következik, hogy $u \notin H$). H külső pontjait jelölje $\mathrm{ext}H$. Világos, hogy
$$\mathrm{ext}H = \mathrm{int}(X \setminus H).$$
3. Az u pont *határpontja* H-nak, ha
$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } B(u,r) \cap H \neq \emptyset \text{ és } B(u,r) \cap (X \setminus H) \neq \emptyset.$$
H határpontjait jelölje ∂H.
4. Az u pont torlódási pontja H-nak, ha
$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{B}(u,r) \cap H \neq \emptyset.$$
H torlódási pontjait jelölje H'.
5. Az u pont *izolált pontja* H-nak, ha
$$\text{létezik } r > 0, \text{ melyre } B(u,r) \cap H = \{u\}.$$
6. A H halmaz *lezártja*
$$\overline{H} := \mathrm{int}H \cup \partial H = H \cup \partial H.$$

2.10. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy bármely $H \subset X$ esetén
$$X = \mathrm{int}H \cup \partial H \cup \mathrm{ext}H.$$

2.11. Példák.

1. $X := (\mathbb{R}, d_e)$, $H := (a,b)$ intervallum (vagy $H := [a,b)$, $H := (a,b]$, $H := [a,b]$.) Ekkor $\mathrm{int}H = (a,b)$, $\mathrm{ext}H = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, $\partial H = \{a,b\}$, $H' = [a,b]$, $\overline{H} = [a,b]$, izolált pontja nincs.
2. $X := (\mathbb{R}, d_e)$, $H := \mathbb{Q}$ racionális számok halmaza. Ekkor $\mathrm{int}H = \mathrm{ext}H = \emptyset$, $\partial H = H' = \overline{H} = \mathbb{R}$, izolált pontja nincs. Ugyanezek érvényesek $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-ra.

2.12. Tétel. *Legyen (X,d) metrikus tér, $H \subset X$, $u \in X$. Ekkor ekvivalensek:*

(i) $u \in H'$*;*
(ii) $\forall r > 0$ *esetén* $B(u,r) \cap H$ *végtelen halmaz;*
(iii) $\exists (x_n) \subset H \setminus \{u\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.

Bizonyítás. A $(ii) \Rightarrow (i)$ a definícióból rögtön következik.
$(i) \Rightarrow (iii)$: tekintsük a $B(u, \frac{1}{n})$ gömböket, és legyen $x_n \in \dot{B}(u, \frac{1}{n}) \cap H$.
$(iii) \Rightarrow (ii)$: mivel $\forall r > 0$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$-re $x_n \in B(u,r)$, ezért az állítás következik. $\square$

2.13. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér, $H \subset X$. Azt mondjuk, hogy H *nyílt halmaz*, ha nem tartalmazza egyetlen határpontját sem, vagyis $H = \mathrm{int}H$.
Azt mondjuk, hogy H *zárt halmaz*, ha minden határpontját tartalmazza, vagyis $H = \overline{H}$.

2.14. Tétel (:-)). *A halmaz nem ajtó! Vagyis: nem igaz, hogy egy halmaz vagy nyílt vagy zárt.*

2.15. Példák. Tetszőleges (X, d) metrikus térben $\emptyset$ és X zárt is és nyílt is. $(\mathbb{R}, d_e)$-ben az $(a, b]$ intervallum se nem zárt se nem nyílt.

2.16. Állítás. *Egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha a komplementere zárt és fordítva (pontosan akkor zárt, ha a komplementere nyílt).*

Bizonyítás. Következik abból, hogy $\partial H = \partial(X \setminus H)$. □

2.17. Példa. Legyen (X, d) a diszkrét metrikus tér tetszőleges alaphalmazon. Ekkor minden $H \subset X$ halmaz nyílt és következésképpen minden halmaz zárt.

Bizonyítás. Világos, hogy $B(x,1) = \{x\} \subset H$ minden $x \in H$ esetén. □

2.18. *Megjegyzés.* A fentiek alapján $H \subset X$ pontosan akkor nyílt, ha minden $h \in H$ ponthoz van olyan $r > 0$, hogy $B(h, r) \subset H$. A következő állítás a zárt halmazok egy karakterizációját adja.

2.19. Állítás. *Egy $F \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat esetén*
$$\lim_{n\to\infty} x_n \in F.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy F zárt és legyen $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat, $x_n \to u$. Indirekt tegyük fel, hogy $u \in X \setminus F$. Mivel ez utóbbi halmaz a 2.16. Állítás szerint nyílt, ezért létezik $r > 0$ sugár, hogy $B(u, r) \subset X \setminus F$. Ekkor a konvergencia definíciója szerint van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén
$$x_n \in B(u, r) \subset X \setminus F,$$
ami ellentmond annak, hogy $(x_n) \subset F$.
Másodszor tegyük fel, hogy minden $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$. Indirekt legyen $u \in \partial F \cap (X \setminus F)$. Ekkor $\frac{1}{n} > 0$-hoz is létezik
$$x_n \in \dot{B}(u, \frac{1}{n}) \cap F.$$
Az így kapott (x_n) sorozat nyilván tart u-hoz, másrészt $u \in X \setminus F$, ami ellentmondás. □

2.20. Állítás. *Nyílt halmazok bármely rendszerének uniója nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ egy nyílt halmazokból álló halmazrendszer, $\cup\mathcal{H}$ a $\mathcal{H}$-ban lévő halmazok uniója. Legyen $x \in \cup\mathcal{H}$. Ekkor létezik $H \in \mathcal{H}$, hogy $x \in H$ és mivel H nyílt, van olyan $r > 0$, melyre $B(x, r) \subset H \subset \cup\mathcal{H}$. □

2.21. Állítás. *Zárt halmazok bármely rendszerének metszete zárt halmaz.*

Bizonyítás. Ha $\mathcal{F}$ zárt halmazok rendszere, és $\cap\mathcal{F}$ jelöli a benne lévő halmazok metszetét, akkor a de Morgan-azonosság alapján
$$X \setminus (\cap\mathcal{F}) = X \setminus (\cap \{F : F \in \mathcal{F}\}) = \cup \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\},$$
ami nyílt halmaz az előző állítás szerint, hiszen $X \setminus F$ nyílt. □

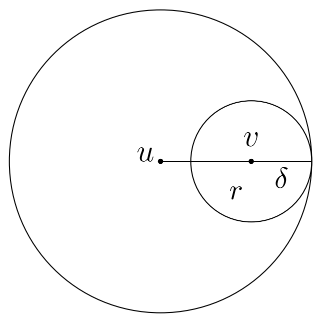
Példák nyílt halmazokra

2.22. Állítás. *Tetszőleges $B(u,r)$ nyílt gömb nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $v \in B(u,r)$. Megmutatjuk, hogy $\delta := r - d(u,v) > 0$ esetén $B(v,\delta) \subset$ $\subset B(u,r)$. Ha $x \in B(v,\delta)$, akkor

$$d(x,u) \leq d(x,v) + d(v,u) < \delta + d(v,u) = r,$$

vagyis $x \in B(u,r)$.



2. ábra.

□

2.23. Állítás. $X \setminus \overline{B}(u,r)$ *nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X \setminus \overline{B}(u,r)$. Megmutatjuk, hogy $\delta := d(x,u) - r$ esetén $B(x,\delta) \subset X \setminus$ $\setminus \overline{B}(u,r)$. Legyen $y \in B(x,\delta)$, ekkor

$$d(y,u) \geq d(x,u) - d(x,y) > d(x,u) - \delta = d(x,u) - d(x,u) + r = r,$$

vagyis $y \in X \setminus \overline{B}(u,r)$. □

2.24. Állítás. *Tetszőleges $H \subset X$ esetén* $\mathrm{int}H$ *nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Be kell látni, hogy $\mathrm{int}H = \mathrm{int}(\mathrm{int}H)$. Az $\mathrm{int}(\mathrm{int}H) \subset \mathrm{int}H$ tartalmazás nyilvánvaló. Legyen $x \in \mathrm{int}H$, ekkor létezik $r > 0$, hogy $B(x,r) \subset H$. Megmutatjuk, hogy $B(x,r) \subset \mathrm{int}H$ is teljesül. Legyen $y \in B(x,r)$. A 2.22. Állítás alapján van olyan $\delta > 0$, melyre $B(y,\delta) \subset B(x,r) \subset H$, vagyis $y \in \mathrm{int}H$ is teljesül. □

2.25. Következmény. *Tetszőleges $H \subset X$ esetén* $\mathrm{ext}H$ *nyílt halmaz (ugyanis* $\mathrm{ext}H =$ $= \mathrm{int}(X \setminus H)$*).*

2.26. Tétel. *Egy $H \subset (\mathbb{R}, d_e)$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha előáll megszámlálható sok diszunkt nyílt intervallum uniójaként.*

Vázlat. Egyrészt tetszőleges ilyen halmaz nyílt a 2.20. Állítás szerint. Másrészt, ha $H \subset$ $\subset (\mathbb{R}, d_e)$ nyílt halmaz, akkor $h \in H$ esetén definiáljuk az alábbi nyílt intervallumot:

$$I_h := \cup \{ J \subset H : J \text{ nyílt intervallum, } h \in J \}.$$

Ilyen J intervallum van H nyíltsága miatt, és az is világos, hogy I_h egy nyílt intervallum. Meggondolható, hogy ha $h_1 \neq h_2$, akkor

$$I_{h_1} \cap I_{h_2} = \emptyset \text{ vagy } I_{h_1} = I_{h_2}$$

teljesül. A bizonyítás hátralévő része következik abból, hogy a számegyenesen bármely diszjunkt nyílt intervallumokból álló rendszer megszámlálható (hiszen mindegyikből kivehető egy-egy, páronként különböző racionális szám). $\square$

Példák zárt halmazokra

2.27. Állítás. *Tetszőleges $\overline{B}(u,r)$ zárt gömb zárt halmaz.*

Bizonyítás. Következik a 2.23. és a 2.16. Állításokból. $\square$

2.28. Állítás. *Tetszőleges $H \subset X$ esetén $\overline{H}$ zárt halmaz – vagyis a halmaz lezártja valóban zárt.*

Bizonyítás. Következik abból, hogy a komplementere, $X \setminus \overline{H} = \mathrm{ext}H$ nyílt a 2.25. Következmény szerint. $\square$

2.29. Állítás. *Bármely $H \subset X$ esetén ∂H zárt halmaz.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy $X \setminus \partial H = \mathrm{int}H \cup \mathrm{ext}H$ nyílt. Ez következik a 2.24., 2.25 és 2.20. Állításokból – vagyis hogy $\mathrm{int}H$ és $\mathrm{ext}H$ nyílt halmazok, és az uniójuk is az. $\square$

2.30. Állítás. *Bármely $H \subset X$ esetén H' zárt halmaz.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $X \setminus H'$ nyílt halmaz. Legyen $u \in X \setminus H'$. A 2.12.(ii) Tétel szerint u-nak van olyan $B(u,r)$ környezete, melyben csak véges sok H-beli pont található. Node ekkor $B(u,r) \subset X \setminus H'$-nek is teljesülnie kell, hiszen ha volna $y \in B(u,r) \cap H'$, akkor véve y-nak egy $B(u,r)$-be eső $B(y,\delta)$ gömbkörnyezetét (ld. 2.22. Állítás), erre nem teljesülhetne, hogy $B(y,\delta) \cap H$ végtelen halmaz, ami ellentmond annak, hogy $y \in H'$. $\square$

A következő állításban a halmaz belsejére és lezártjára adunk jellemzést.

2.31. Állítás. *Legyen (X,d) metrikus tér, $H \subset X$.*
1. $\mathrm{int}H = \cup\{G : G \subset H, G$ *nyílt halmaz*$\}$*;*
2. $\overline{H} = \cap\{F : H \subset F, F$ *zárt halmaz*$\}$

Bizonyítás. 1. A 2.24. Állítás alapján $\mathrm{int}H$ is egy, az unióban szereplő nyílt halmaz, ezért

$$\mathrm{int}H \subset \cup\{G : G \subset H, G \text{ nyílt halmaz}\}.$$

Másrészt ha $G \subset H$ nyílt halmaz, akkor $G \subset \mathrm{int}H$ is teljesül, mivel G minden pontja körül található olyan gömb, mely része G-nek – és így H-nak is. Tehát

$$\cup\{G : G \subset H, G \text{ nyílt halmaz}\} \subset \mathrm{int}H$$

is igaz.
2. A de Morgan-azonosság és az 1. pont alatt bizonyítottak alapján, a 2.16. Állítás felhasználásával

$$\begin{aligned}\overline{H} &= X \setminus \mathrm{ext}H = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus H) = X \setminus (\cup\{G : G \subset X \setminus H, G \text{ nyílt halmaz}\}) \\ &= \cap\{X \setminus G : H \subset X \setminus G, G \text{ nyílt halmaz}\} = \cap\{F : H \subset F, F \text{ zárt halmaz}\}.\end{aligned}$$

$\square$

A fenti állítás úgyis fogalmazható, hogy $\mathrm{int}H$ a H halmazban lévő legbővebb nyílt halmaz, $\overline{H}$ pedig a H halmazt tartalmazó legszűkebb zárt halmaz.

2.2. Kompaktság metrikus terekben.

2.32. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $\emptyset \neq H \subset X$ halmaz *átmérője*

$$\operatorname{diam} H := \sup \{d(x,y) : x,y \in H\}.$$

$\operatorname{diam} \emptyset := 0$.

Fontos, hogy a fenti definícióban sup helyett nem írhatunk max-ot, pl. $(\mathbb{R}, d_e)$-ben egy $I = (a,b)$ intervallum átmérője $b-a$, de nincs két olyan pontja, aminek ennyi lenne a távolsága. Másrészt ha (X,d) a diszkrét metrikus tér, akkor $\operatorname{diam}(B(x,\frac{1}{2})) = 0$ bármely $x \in X$ esetén.

2.33. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $H \subset X$ halmazt *korlátos*nak mondunk, ha $\operatorname{diam} H < \infty$.

2.34. Definíció. Legyenek (Z,ρ) és (X,d) metrikus terek. Egy $f: Z \to X$ függvény *korlátos*, ha az $R(f) \subset X$ értékkészlet-halmaza korlátos.

A következő tétel azt mondja, hogy egy halmaz pontosan akkor korlátos, ha belefoglalható egy (tetszőleges pont körüli) gömbbe.

2.35. Tétel. *Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $\emptyset \neq H \subset X$ esetén ekvivalensek:*

(i) H korlátos;
(ii) $\exists u \in X$ és $\exists r > 0$, hogy $H \subset B(u,r)$;
(iii) $\forall v \in X$ esetén $\exists r > 0$, hogy $H \subset B(v,r)$.

Bizonyítás. A $(iii) \Rightarrow (ii)$ nyilvánvaló. A $(ii) \Rightarrow (i)$ abból következik, hogy (ii) fennállása esetén $\operatorname{diam} H \leq 2r$ teljesül.
$(i) \Rightarrow (iii)$: legyen $v \in X$ adva, és válasszunk egy tetszőleges $h \in H$ pontot. Legyen $r := \operatorname{diam} H + d(h,v) + 1$. Ekkor bármely $x \in H$ esetén

$$d(x,v) \leq d(x,h) + d(h,v) \leq \operatorname{diam} H + d(h,v) < r,$$

tehát $H \subset B(v,r)$. □

2.36. Definíció. Legyen (X,d) metrikus tér. Egy $H \subset X$ halmazt *(sorozat)kompakt*nak mondunk, ha bármely H-beli sorozatnak van H-beli ponthoz konvergáló részsorozata. Az (X,d) metrikus tér *(sorozat)kompakt*, ha benne X sorozatkompakt halmaz, vagyis tetszőleges sorozatnak van konvergens részsorozata.

2.37. Példa. Az I. évben tanultak alapján (ld. az 5.9. Bolzano-Weierstrass tételt a Laczkovich-T. Sós jegyzetben) az $(\mathbb{R}, d_e)$ térben minden $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum sorozatkompakt.

2.38. Tétel. *Legyen (X,d) metrikus tér. Ha $H \subset X$ sorozatkompakt, akkor H korlátos és zárt halmaz.*

Bizonyítás. Először a zártságot bizonyítjuk. A 2.19. Állítás alapján elég megmutatni, hogy bármely H-beli konvergens sorozat határértéke H-ban van. Legyen $(x_n) \subset H$ konvergens sorozat. Mivel H sorozatkompakt, ezért minden H-beli sorozatnak, így (x_n)-nek is van H-ban lévő ponthoz konvergáló részsorozata – node akkor $\lim x_n \in H$ is teljesül, hiszen $\lim x_n$ megegyezik minden részsorozatának a határértékével.

Másodszor tegyük fel indirekt, hogy H sorozatkompakt, de nem korlátos. Legyen $x_1 \in$ $\in H$ tetszőleges. Válasszunk $x_2 \in H \setminus B(x_1{,}1)$ pontot – ilyen létezik az indirekt feltevés és a 2.35. Tétel szerint. Indukcióval, az n. lépésben válasszunk

$$x_n \in H \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i{,}1) \right)$$

pontot – ilyen létezik, mert világos, hogy véges sok gömb uniója, $\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i{,}1)$ korlátos. Tehát kaptunk egy $(x_n) \subset H$ sorozatot, melyre teljesül, hogy

$$d(x_n, x_i) \geq 1,\ i = 1, \ldots, n-1. \tag{2.2}$$

Ebből a sorozatból nem választható ki konvergens részsorozat, hiszen ha volna ilyen

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = u,$$

akkor $\varepsilon = \frac{1}{2}$-hez létezne $K \in \mathbb{N}$, hogy minden $k \geq K$ esetén $d(x_{n_k}, u) < \frac{1}{2}$ teljesül. Véve $k > l \geq K$ természetes számokat, $d(x_{n_k}, u) < \frac{1}{2}$ és $d(x_{n_l}, u) < \frac{1}{2}$ teljesül, amiből

$$d(x_{n_k}, x_{n_l}) \leq d(x_{n_k}, u) + d(u, x_{n_l}) < 1,$$

ez pedig ellentmond (2.2)-nek. □

2.39. Példa. Korlátos és zárt, de nem sorozatkompakt halmazra.
Legyen

$$X := \ell^\infty = \{x = (x_n) : (x_n) \text{ korlátos, valós sorozat}\}.$$

A $d : X \times X \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

függvényről könnyen látható, hogy metrika. Álljon a H halmaz azon sorozatokból, melyeknek pontosan egy eleme 1, a többi 0, vagyis a

$$\begin{aligned} e_1 &:= (1{,}0{,}0, \ldots) \\ e_2 &:= (0{,}1{,}0, \ldots) \\ &\vdots \\ e_n &:= (0{,}0{,}0, \ldots, \underbrace{1}_{n}, 0 \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

jelöléssel

$$H := \{e_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Világos, hogy $H \subset X$ és $H \subset \overline{B}(\underline{0}{,}1)$, ahol most $\underline{0}$ a konstans 0 sorozatot jelöli, tehát H korlátos halmaz. Mivel $d(e_i, e_j) = 1$, ha $i \neq j$, ezért a H elemei körüli gömbökre

$$B\left(e_i, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(e_j, \frac{1}{2}\right),\ i \neq j$$

teljesül. Ebből következik, hogy ha $x \in \partial H$, akkor $x \in B(e_j, \frac{1}{2})$ valamely $j \in \mathbb{N}$ számra. Ha $x \neq e_j$ volna, akkor létezne x körül olyan gömb, mely nem tartalmazza e_j-t, így nem lehetne $x \in \partial H$. Ebből kapjuk, hogy $\partial H \subset H$ (sőt, $\partial H = H$), tehát H zárt halmaz is. Másrészt $d(e_i, e_j) = 1$, $i \neq j$ miatt az (e_n) sorozatból nem választható ki konvergens részsorozat (ez hasonlóan látható, mint a fenti bizonyításban), tehát H nem sorozatkompakt.

2.40. Tétel. *Sorozatkompakt halmaz zárt részhalmaza sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen H sorozatkompakt és $G \subset H$ zárt halmaz, $(x_n) \subset G$ tetszőleges sorozat. Mivel $(x_n) \subset H$ is teljesül, azért a sorozatnak van olyan (x_{n_k}) részsorozata, mely egy H-beli ponthoz konvergál. Node a 2.19. Állítás szerint ez a határérték G-ben van, amivel azt állítást beláttuk. □

Az alábbi fogalomra az $\mathbb{R}^n$-beli sorozatkompakt halmazok jellemzésénél lesz szükség.

2.41. Definíció. Legyen $X \neq \emptyset$ alaphalmaz, és legyenek $d_1, d_2 : X \times X \to [0, +\infty)$ metrikák X-en. Azt mondjuk, hogy a d_1 metrika *ekvivalens* a d_2 metrikával, ha léteznek $m, M > 0$ számok, hogy

$$m \cdot d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le M \cdot d_2(x,y) \text{ minden } x, y \in X \text{ esetén.} \tag{2.3}$$

Jelölésben: $d_1 \sim d_2$.

2.42. Tétel. *Legyen $X := \mathbb{R}^n$ és legyenek $p_1, p_2 \in [1, \infty]$ tetszőleges számok. Ekkor X-en a (2.1) egyenlőség szerint definiált d_{p_1} metrika ekvivalens a d_{p_2} metrikával.*

Bizonyítás. Azt fogjuk megmutatni, hogy bármely $p \in [1, +\infty)$ esetén $d_1 := d_p$ ekvivalens $d_2 := d_\infty$-vel $\mathbb{R}^n$-en, amiből az állítás a definíció alapján következik. Legyen $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(n \cdot (\max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i - y_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \cdot d_\infty(x,y),$$

tehát a (2.3) 2. egyenlőtlensége $M := n^{\frac{1}{p}}$ választással teljesül. Másrészt

$$d_\infty(x,y) = \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i - y_i| = \left((\max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i - y_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = d_p(x,y),$$

tehát a (2.3) 1. egyenlőtlenségében $m = 1$ választható. □

2.43. Állítás. *Ha $d_1 \sim d_2$ metrikák X-en, akkor bármely $B_1(u,r)$, a d_1 metrikában vett gömb tartalmaz egy $B_2(u,\rho)$, a d_2 metrikában vett gömböt, és fordítva, bármely, a d_2 metrikában vett gömb tartalmaz a d_1 metrikában vett gömböt. Továbbá bármely, a d_1 metrikában vett gömb benne van egy, a d_2 metrikában vett gömbben, és fordítva.*

Bizonyítás. Legyen $B_1(u,r)$, $u \in X$, $r > 0$ egy d_1 metrikában vett gömb, és legyen $\rho := r/M$, ahol $M > 0$ a (2.3) szerint létező szám. Megmutatjuk, hogy $B_2(u,\rho) \subset B_1(u,r)$. Legyen $x \in B_2(u,\rho)$. Ekkor a (2.3) alapján

$$d_1(x,u) \le M \cdot d_2(x,u) < M \cdot \rho = r,$$

tehát $x \in B_1(u,r)$. Az első állítás másik fele, valamint a másik állítás analóg módon bizonyítható. □

2.44. Következmény. *Ha $d_1 \sim d_2$ metrikák X-en, akkor az (X, d_1) és (X, d_2) terekben ugyanazok a korlátos halmazok.*

Bizonyítás. Következik abból, hogy bármely, a d_1 metrikában vett gömb benne van egy, a d_2 metrikában vett gömbben, és fordítva, valamint a 2.35. Tétel felhasználásával. □

2.45. Következmény. *Ha $d_1 \sim d_2$ metrikák X-en, akkor az (X, d_1) és (X, d_2) terekben ugyanazok a konvergens sorozatok, és a határértékük is megegyezik.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n)\subset X$ konvergens sorozat, $\lim x_n=u$ a d_2 metrikában. Megmutatjuk, hogy $\lim x_n = u$ a d_1 metrikában is teljesül. Legyen $r > 0$. Meg kell mutatnunk, hogy elég nagy n-re $x_n \in B_1(u, r)$. Mivel d_1 és d_2 ekvivalens metrikák, a 2.43. Állítás alapján létezik $\rho > 0$, hogy $B_2(u, \rho) \subset B_1(u, r)$. Mivel (x_n) tart u-hoz a d_2 metrikában, azért ρ-hoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre minden $n \geq N$ esetén $x_n \in B_2(u, \rho) \subset B_1(u, r)$, amivel az állítást beláttuk. A másik irány analóg módon bizonyítható. □

2.46. Következmény. *Ha $d_1 \sim d_2$ metrikák X-en, akkor az (X, d_1) és (X, d_2) terekben ugyanazok a zárt halmazok.*

Bizonyítás. Legyen $F \subset (X, d_1)$ zárt halmaz, és legyen $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat az (X, d_2) térben, vagyis $\lim x_n = u$ a d_2 metrika szerint. A 2.19. Állítás alapján meg kell mutatnunk, hogy $u \in F$. Node a fenti következmény szerint $\lim x_n = u$ a d_1 metrikában is teljesül, így a 2.19. Állításból kapjuk, F d_1-beli zártsága miatt, hogy $u \in F$ □

2.47. Tétel. *Az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ térben minden korlátos és zárt halmaz sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen először $n=2$ az egyszerűség kedvéért. Mivel tetszőleges korlátos és zárt halmaz a 2.35. Tétel szerint belefoglalható egy origó körüli zárt gömbbe, a 2.40. Tétel szerint elég belátni, hogy $\overline{B}_\infty(0, r) = [0, r] \times [0, r]$ sorozatkompakt halmaz bármely $r > 0$ esetén. Legyen $(x_n) \subset \overline{B}_\infty(0, r)$ tetszőleges sorozat $\mathbb{R}^2$-en. Ekkor az $(x_n^1) \subset [0, r]$ (az első koordinátákból álló) sorozatnak a Bolzano-Weierstrass tétel szerint létezik egy konvergens részsorozata, $(x_{n_k}^1)$, melynek határértéke is $[0, r]$-ben fekszik. Most válasszunk, szintén a Bolzano-Weierstrass tétel szerint, az $(x_{n_k}^2) \subset [0, r]$, 2. koordinátákból álló sorozatból egy konvergens részsorozatot, $(x_{n_{k_l}}^2)$-t, aminek a határértéke szintén $[0, r]$-ben van. Ekkor az $(x_{n_{k_l}}) \subset \overline{B}_\infty(0, r) = [0, r] \times [0, r]$ sorozat konvergens, és határértéke $\overline{B}_\infty(0, r)$-ben van. Hasonló meggondolással bizonyítható az állítás tetszőleges n-re. □

2.48. Következmény. *Az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ térben egy halmaz pontosan akkor sorozatkompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Következik az előző és a 2.38. Tételekből. □

2.49. Tétel. *Tetszőleges $p\in[1, \infty]$ valós szám esetén az $(\mathbb{R}^n, d_p)$ térben egy halmaz pontosan akkor sorozatkompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Következik a 2.42. Tételből, valamint a 2.44., a 2.46. és a 2.48. Következményekből. □

2.3. Metrikus terek teljessége.

2.50. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér, $(x_n) \subset X$. Azt mondjuk, hogy (x_n) *Cauchy-sorozat*, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n, m \geq N$ esetén $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

2.51. Állítás. *Minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n)\subset X$ konvergens sorozat, $\lim_{n\to\infty} x_n=u$ és legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges. Válasszunk a sorozat-határérték definíciója szerint $\varepsilon/2 > 0$-hoz N küszöbindexet, amire tehát teljesül, hogy $n \geq N$ esetén $d(x_n, u) < \varepsilon/2$. Ekkor ha $n, m \geq N$,

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, u) + d(u, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

2.52. Példa. Cauchy-sorozatra, ami nem konvergens Legyen $X := \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $d := d_e|_X$. Tekintsük az $(\frac{1}{n}) \subset X$ sorozatot. Könnye látható, hogy ez a megadott metrikában Cauchy-sorozat, de nem konvergens, mert a határértéke 0 kellene legyen, ami nem eleme X-nek.

2.53. Állítás. *Ha $d_1 \sim d_2$ metrikák X-en, akkor az (X, d_1) és (X, d_2) terekben ugyanazok a Cauchy-sorozatok.*

Bizonyítás. A bizonyítás a 2.45. Következmény bizonyításával hasonló módon történik. □

2.54. Definíció (FONTOS!)**.** Egy (X, d) metrikus teret *teljes metrikus tér*nek mondunk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

2.55. Állítás. *Ha $d_1 \sim d_2$ ekvivalens metrikák X-en, akkor az (X, d_1) és (X, d_2) terek egyszerre teljesek vagy nem teljesek.*

Bizonyítás. Azonnal adódik a 2.53. Állításból. □

2.56. Példák (Teljes metrikus terekre)**.**

I. $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $p \in [1, +\infty]$. Az előbbi állítás és a 2.42. Tétel szerint elég az $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ térre belátni. Meggondolható, hogy $(x_n) \subset (\mathbb{R}^n, d_\infty)$ pontosan akkor Cauchy-sorozat, ha minden $i \in \{1, \ldots, n\}$ esetén az i. koordinátákból álló $(x_n^i) \subset \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat – tehát konvergens, a valós sorozatoknál tanultak szerint. Legyen

$$\lim_{n\to\infty} x_n^i := u^i.$$

Egyszerűen látható, hogy az $u := (u^1, \ldots, u^n)$ definícióval

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u \text{ a } d_\infty \text{ metrikában,}$$

tehát (x_n) konvergens.

II. Jelölje $b(H)$ a $H \subset \mathbb{R}$ halmazon korlátos függvények halmazát és legyen

$$d_\infty(f, g) := \sup_{h\in H} |f(h) - g(h)|.$$

Könnyen látható, hogy ez metrika. A $(b(H), d_\infty)$ tér teljes metrikus tér. Ugyanis legyen $(f_n) \subset b(H)$ Cauchy-sorozat, vagyis minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n, m \geq N$ esetén

$$d_\infty(f_n, f_m) := \sup_{h\in H} |f_n(h) - f_m(h)| < \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy minden $h \in H$ esetén

$$|f_n(h) - f_m(h)| < \varepsilon,$$

tehát rögzített h-ra $(f_n(h)) \subset \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, így konvergens. Jelölje a határtéket

$$\lim_{n\to\infty} f_n(h) := f(h),\ h \in H.$$

Megmutatjuk, hogy (f_n) a d_∞ metrikában tart az így definiált $f \in b(H)$ függvényhez. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített. Válasszunk $\varepsilon/2$-höz $N \in \mathbb{N}$-et úgy, hogy $n, m \geq N$ esetén

$$\sup_{h\in H} |f_n(h) - f_m(h)| < \varepsilon/2, \tag{2.4}$$

tehát speciálisan, $n := N$ és $m > N$-re

$$|f_N(h) - f_m(h)| < \varepsilon/2 \text{ minden } h \in H\text{-ra.}$$

Ekkor az $m \to \infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy tetszőleges $h \in H$-ra

$$|f_N(h) - f(h)| \leq \varepsilon/2.$$

Másrészt ha $n \geq N$, akkor (2.4) és az előbbiek alapján minden $h \in H$ esetén

$$|f_n(h) - f(h)| \leq |f_n(h) - f_N(h)| + |f_N(h) - f(h)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Tehát találtunk olyan N-et, hogy ha $n \geq N$, akkor

$$\sup_{h \in H} |f_N(h) - f(h)| \leq \varepsilon,$$

amiből az állítás következik.

2.57. *Megjegyzés.* Világos, hogy az $(f_n) \subset b(H)$ függvénysorozat d_∞-beli konvergenciája a függvénysorozat *egyenletes konvergenciája*, ugyanis $f_n \to f$ d_∞-ben ekvivalens azzal, hog

$$a_n := \sup_{h \in H} |f_n(h) - f(h)| \to 0, \quad n \to \infty.$$

2.58. Állítás. *Legyen (X, d) teljes metrikus tér és $M \subset X$* zárt *részhalmaz. Ekkor $d_M :=$ $= d|_{M \times M}$ jelöléssel (M, d_M) teljes metrikus tér.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset M$ Cauchy-sorozat d_M szerint. Ekkor $(x_n) \subset X$ is teljesül, és (x_n) nyilván Cauchy-sorozat d szerint is, tehát (X, d) teljessége miatt konvergens. Legyen a határértéke $u \in X$. Node a 2.19. Állítás miatt $u \in M$ is teljesül, és ezzel az állítást beláttuk. □

2.59. Következmény. *A 2.56. Példában felsoroltak alapján $([a, b], d_e)$, $(C[a, b], d_\infty)$ és $(R[a, b], d_\infty)$ teljes metrikus terek (ld. az előző félév 6.10. és 6.13. Tételei).*

2.60. Definíció. Legyenek (X, d) és (Y, ρ) tetszőleges metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az $f : X \to Y$ leképezés *kontrakció*, ha létezik $q \in [0,1)$, hogy

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq q \cdot d(x_1, x_2), \ x_1, x_2 \in X.$$

2.61. Tétel (Banach-féle fixponttétel)**.** *Legyen (X, d)* teljes *metrikus tér, $f : X \to X$ kontrakció. Ekkor f-nek létezik egyértelmű fixpontja, vagyis $\exists!\, u \in X$, melyre*

$$f(u) = u.$$

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges, és indukcióval, $x_n := f(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$. Az így kapott $(x_n) \subset X$ sorozatra

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\
&= d(f(x_{n-1}), f(x_{n-2})) + d(f(x_{n-2}), f(x_{n-3})) + \cdots + d(f(x_m), f(x_{m-1})) \\
&\leq q\left(d(x_{n-1}, x_{n-2}) + d(x_{n-2}, x_{n-3}) + \cdots + d(x_m, x_{m-1})\right) \\
&\ \vdots \\
&\leq \left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots q^m\right) \cdot d(x_1, x_0) = \frac{q^m - q^n}{1 - q} \to 0, \ n, m \to \infty
\end{aligned}$$

tehát $(x_n) \subset X$ Cauchy-sorozat, és X teljessége miatt konvergens. Legyen

$$u := \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Megmutatjuk, hogy u fixpontja f-nek. Mivel

$$\begin{aligned}
d(u, f(u)) &\leq d(u, x_n) + d(x_n, f(u)) = d(u, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(u)) \\
&\leq d(u, x_n) + q \cdot d(x_{n-1}, u) \to 0, n \to \infty,
\end{aligned}$$

ezért $d(u, f(u)) = 0$, tehát $u = f(u)$. Ha $v = f(v)$ is teljesül, akkor

$$0 \le d(u, v) = d(f(u), f(v)) \le q \cdot d(u, v),$$

ami $0 \le q < 1$ miatt csak úgy lehet, hogy $d(u, v) = 0$, vagyis $u = v$. □

3. Normált terek

3.1. Definíció. Legyen X egy (valós vagy komplex számtest feletti) vektortér. A

$$\|\cdot\| : X \to [0, +\infty)$$

függvényt az X-en értelmezett *normá*nak hívjuk, ha kielégíti alábbi 3 tulajdonságot:

(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $\forall x \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ esetén $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
(iii) $\forall x, y \in X$ esetén $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (háromszög-egyenlőtlenség).

3.2. Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ rendezett pár *normált tér*, ha X ($\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{C}$ feletti) vektortér, $\|\cdot\|$ pedig rajta értelmezett norma.

3.3. Példák (Normált terekre)**.**

I. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ill. $(\mathbb{C}, |\cdot|)$;
II. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, ahol $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i|;$$

III. $(b(H), \|\cdot\|_\infty)$, ahol $b(H)$ jelöli a H halmazon értelmezett korlátos valós függvények halmazát, $f \in b(H)$ esetén

$$\|f\|_\infty = \sup_{h \in H} |f(h)|.$$

3.4. Állítás. *Legyen $X := \mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$. Az*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

egyenlőséggel definiált függvény norma $\mathbb{R}^n$-en.

Bizonyítás. Az (i) és (ii) tulajdonságok nyilvánvalóak. A (iii) háromszög-egyenlőtlenség bizonyításához szükségünk lesz egy lemmára. Ha X vektortér, akkor egy $C \subset X$ halmazt *konvex halmaz*nak hívunk, ha minden $x, y \in C$ és $t \in [0,1]$ esetén $t \cdot x + (1-t) \cdot y \in C$ teljesül.

3.5. Lemma. *A*

$$B := \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\|_p \le 1\}$$

konvex részhalmaza $\mathbb{R}^n$-nek.

Bizonyítás. Legyenek $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B$ és $t \in [0,1]$. Nyilvánvalóan elég megmutatni, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} |t \cdot x_k + (1-t) \cdot y_k|^p \le 1$$

teljesül.

$$\sum_{k=1}^{n}|t\cdot x_k+(1-t)\cdot y_k|^p \le \sum_{k=1}^{n}(|t\cdot x_k|+|(1-t)\cdot y_k|)^p \le \sum_{k=1}^{n}(t\cdot|x_k|^p+(1-t)\cdot|y_k|^p)$$
$$= t\cdot\sum_{k=1}^{n}|x_k|^p+(1-t)\cdot\sum_{k=1}^{n}|y_k|^p = t+(1-t)=1,$$

ahol az első egyenlőtlenségben az abszolút értékre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenséget alkalmaztuk és felhasználtuk, hogy $p>0$; a második egyenlőtlenségben pedig azt használtuk, hogy $p\ge 1$ esetén a $\mathbb{R}_+\ni x\mapsto x^p$ függvény konvex. □

Ha $x=0$ vagy $y=0$, akkor $\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p$ nyilván teljesül. Ha $x\neq 0$ és $y\neq 0$, akkor

$$\frac{x}{\|x\|_p}\in B \text{ és } \frac{y}{\|y\|_p}\in B.$$

A (ii) tulajdonság felhasználásával

$$\frac{1}{\|x\|_p+\|y\|_p}\cdot\|x+y\|_p = \left\|\frac{1}{\|x\|_p+\|y\|_p}\cdot(x+y)\right\|_p$$
$$= \left\|\frac{\|x\|_p}{\|x\|_p+\|y\|_p}\cdot\frac{x}{\|x\|_p}+\frac{\|y\|_p}{\|x\|_p+\|y\|_p}\frac{y}{\|y\|_p}\right\|_p \le 1,$$

mivel

$$\frac{\|x\|_p}{\|x\|_p+\|y\|_p}+\frac{\|y\|_p}{\|x\|_p+\|y\|_p}=1$$

és alkalmaztuk a fenti Lemmát. □

3.6. Állítás. *Ha $(X,\|\cdot\|)$ normált tér, akkor a*

$$d: X\times X\to[0,+\infty),\, d_{\|\cdot\|}(x,y)=d(x,y):=\|x-y\|$$

hozzárendeléssel értelmezett függvény metrika X-en, amelyet a norma által indukált metrik*ának hívunk. Tehát minden normált tér egyben metrikus tér is.*

Bizonyítás. A 2.1. Definíció (i) tulajdonsága a d függvényre a 3.1. Definíció (i) tulajdonságából nyilvánvaló. A d (ii) szimmetrikussága következik abból, hogy a norma (ii) tulajdonságában $\lambda=-1$-et írunk. A metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség pedig az alábbiakból adódik:

$$d(x,z)=\|x-z\|=\|(x-y)+(y-z)\|\le\|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z).$$

□

3.7. Következmény. *Az $(X,\|\cdot\|)$ normált térre érvényes mindaz, amit metrikus terekre tanultunk.*

3.8. *Megjegyzés.* Vigyázat!!! Nem minden metrika származik normából!

3.9. Következmény. *A 2.3(i) Példában definiált $d_p:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$,*

$$d_p(x,y):=\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

függvény metrika (a 3.4. Állításban szereplő norma által indukált).

3.10. Definíció. Legyen X vektortér, és $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : X \to (0, +\infty]$ normák X-en. Azt mondjuk, hogy a $\|\cdot\|_1$ norma *ekvivalens* a $\|\cdot\|_2$ normával, ha léteznek $m, M > 0$ számok, hogy

$$m \cdot \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq M \cdot \|x\|_2 \text{ minden } x \in X \text{ esetén.} \tag{3.2}$$

Jelölésben: $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$.

3.11. Állítás. *Legyen X vektortér, és $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : X \to (0, +\infty]$ normák X-en. A $\|\cdot\|_1$ norma pontosan akkor ekvivalens a $\|\cdot\|_2$ normával, ha az általuk indukált metrikák ekvivalensek.*

Bizonyítás. Azonnal következik a 2.41. Definícióból és a 3.6. Állításból. □

Az alábbi tulajdonságú normált terek elmélete fontos fejezetet jelent az analízisben, ezen belül a funkcionálanalízis témakörében.

3.12. Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér olyan, hogy a norma által indukált d metrikára nézve X teljes metrikus tér, vagyis (X, d) teljes. Ekkor X neve *Banach tér.*

3.13. Példa (Banach térre)**.** A 2.56.II. Példa alapján $(b(H), \|\cdot\|_\infty)$ Banach tér.

4. Folytonosság, határérték metrikus terekben

Legyenek az alábbiakban (X_i, d_i), $i = 1{,}2$ metrikus terek, $H \subseteq X_1$, $f : H \to X_2$.

4.1. Definíció. A fenti feltételek mellett f *folytonos az* $u \in H$ *helyen* vagy *az* u *pontban*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden $x \in H$, $d_1(x, u) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(u)) < \varepsilon$.
Másképpen: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden $x \in B_1(u, \delta) \cap H$ esetén $f(x) \in$ $\in B_2(f(u), \varepsilon)$.

4.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy f *folytonos a* H *halmazon*, ha annak minden pontjában folytonos.

4.3. Definíció. Legyen $f : H \to X_2$, $u \in H'$, $v \in X_2$. Azt mondjuk, hogy f *határértéke az* u *helyen* v, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden $x \in H$, $x \neq u$, $d_1(x, u) < \delta$ esetén $d_2(f(x), v) < \varepsilon$.
Másképpen: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy minden $x \in \dot{B}_1(u, \delta) \cap H$ esetén $f(x) \in$ $\in B_2(v, \varepsilon)$.
Jelölés:

$$\lim_u f = v \text{ vagy } \lim_{x \to u} f(x) = v.$$

4.4. *Megjegyzés.* A fenti definíciók gömbökkel való ekvivalens megfogalmazásaiból nyilvánvaló, hogy a definíciók függetlenek az egyes tereken vett ekvivalens metrikáktól, ld. a 2.43. Állítást.

A valós függvényeknél tanultakhoz analóg módon megfogalmazhatunk átviteli elveket.

4.5. Tétel (Átviteli elv folytonosságra)**.** *A fenti feltételek mellett ekvivalensek:*
(a) f folytonos u-ban;
(b) minden $(x_n) \subset H$, $x_n \to u$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(u)$.

Bizonyítás. A valós függvényekre vonatkozó átviteli elvhez hasonlóan történik.
$(a) \Rightarrow (b)$: Legyen $(x_n) \subset H$, $x_n \to u$, valamint $\varepsilon > 0$. Ekkor a folytonosság definíciója miatt létezik $\delta > 0$, hogy minden $x \in H$, $d_1(x, u) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(u)) < \varepsilon$. Node a konvergencia miatt $\delta > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ indexre $d_1(x_n, u) < \delta$. Tehát $n \geq N$-re $d_2(f(x_n), f(u)) < \varepsilon$, így $f(x_n) \to f(u)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Indirekt tegyük fel, hogy f nem folytonos u-ban. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyhez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén találunk $x_n \in B_1(u, \frac{1}{n}) \cap H$ elemet, hogy $f(x_n) \notin B_2(f(u), \varepsilon)$. Így kaptunk egy $x_n \to u$ sorozatot (hiszen $d_1(x_n, u) < \frac{1}{n} \to 0$), melyre $f(x_n) \nrightarrow f(u)$, ellentmondás. $\square$

4.6. Tétel (Átviteli elv határértékre)**.** *Legyen $f: H \to X_2$, $u \in H'$, $v \in X_2$. Ekkor ekvivalensek:*

(a) $\lim_u f = v$*;*
(b) minden $(x_n) \subset H$, $x_n \neq u$, $x_n \to u$ sorozat esetén $f(x_n) \to v$;
$(b)^*$ minden $(x_n) \subset H$, $x_n \neq u$, $x_n \to u$ sorozat esetén $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens.

Bizonyítás. A folytonosságéhoz ill. a valós függvényeknél tanultakhoz hasonló módon történik. $\square$

4.7. Definíció. Az $f: H \to X_2$ függvényről azt mondjuk, hogy *Lipschitz-tulajdonságú H-n*, ha létezik $L > 0$, hogy

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_1(x, y) \text{ minden } x, y \in H \text{ esetén.}$$

Világos, hogy a 2.60. Definícióban bevezetett kontrakció Lipschitz-tulajdonságú $L = q$ választással.

4.8. Állítás. *Ha f Lipschitz-tulajdonságú, akkor folytonos is H-n.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\varepsilon > 0$-hoz $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ választás jó minden $h \in H$-ra. $\square$

4.9. Példák (Metrikus tereken értelmezett folytonos függvényekre)**.**

I. Az
$$+, -, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
(összeadás, kivonás, szorzás) függvények folytonosak (bizonyítás: átviteli elvvel és a való sorozatoknál tanultak segítségével, $\mathbb{R}^2$-en vehetjük a d_∞ maximum-metrikát);

II.
$$\div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
(osztás) folytonos (bizonyítás szintén átviteli elvvel);

III. Ha (X_i, d_i), $i = 1,2$ tetszőleges metrikus terek, $c \in X_2$ adott, akkor az $f(x) := c$, $x \in X_1$ konstans függvény folytonos;

IV. Legyen $a = (a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$ adva. Az
$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad Ax := \sum_{i=1}^n a_i x_i,\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$
homogén lineáris függvény folytonos, ui.:
$$\begin{aligned} |Ax - Ay| &= \left| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i y_i \right| = \left| \sum_{i=1}^n a_i \cdot (x_i - y_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_i| \cdot |x_i - y_i| \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i - y_i| \cdot \sum_{i=1}^n |a_i| \\ &= d_\infty(x, y) \cdot L, \end{aligned}$$
vagyis A Lipschitz-tulajdonságú $L := \sum_{i=1}^n |a_i|$ konstanssal;

V. Tekintsük az

$$F : (R[a,b]), d_\infty) \to \mathbb{R}, \quad Ff := \int_a^b f,\ f \in R[a,b]$$

lineáris leképezést. Ennek folytonosságát kétféleképpen is bizonyíthatjuk. Az átviteli elv segítségével: az elmúlt félévben a 6.13 Tételben láttuk, hogy ha $f_n \to f$ a d_∞ metrikában – vagyis $f_n \hookrightarrow f$ –, akkor

$$Ff_n = \int_a^b f_n \to \int_a^b f = Ff.$$

Másrészt:

$$|Ff - Fg| = \left| \int_a^b f - \int_a^b g \right| = \left| \int_a^b (f-g) \right|$$
$$\le (b-a) \cdot \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = L \cdot d_\infty(f,g),$$

vagyis F Lipschitz-tulajdonságú.

A következőkben az $X_2 := \mathbb{R}^n$ esetet vizsgáljuk.

4.10. Definíció. Legyen (X,d) tetszőleges metrikus tér, $H \subseteq X$ és $f : H \to \mathbb{R}^n$ függvény. Ekkor f *i. koordinátfüggvényé*nek azt az $f_i : H \to \mathbb{R}$ leképezést nevezzük, mely minden $h \in H$ elemhez hozzárendeli az f-fel vett képének i. koordinátáját, vagyis

$$f_i(h) := f(h)_i, \quad h \in H, i = 1, \ldots, n.$$

4.11. Tétel. *Egy $f : H \to \mathbb{R}^n$ függvény pontosan akkor folytonos egy $u \in H$ pontban, ha ott minden koordinátafüggvénye folytonos.*

Bizonyítás. Ha f folytonos u-ban, akkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $d(x,u) < \delta$, akkor

$$|f_i(x) - f_i(u)| \le \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |f_i(x) - f_i(u)| = d_\infty(f(x), f(u)) < \varepsilon,$$

tehát az f_i koordinátafüggvény is folytonos u-ban.
Másrészt ha minden f_i folytonos u-ban, akkor $\varepsilon > 0$-hoz léteznek $\delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ számok, hogy $d(x,u) < \delta_i$ esetén $|f_i(x) - f_i(u)| < \varepsilon$. Véve

$$\delta := \min_{i \in \{1,\ldots,n\}} \delta_i,$$

$d(x,u) < \delta$ esetén $|f_i(x) - f_i(u)| < \varepsilon$ minden i-re, tehát

$$\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |f_i(x) - f_i(u)| = d_\infty(f(x), f(u)) < \varepsilon$$

is teljesül. Így f is folytonos u-ban. □

4.12. Tétel. *Legyen $f : H \to \mathbb{R}^n$, $u \in H'$, $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. Ekkor $\lim_u f = v$ pontosan akkor teljesül, ha minden $i = 1, \ldots, n$ esetén $\lim_u f_i = v_i$.*

Bizonyítás. A fenti bizonyításhoz analóg módon látható. □

Most az $X_1 := \mathbb{R}^2$ esetet vizsgáljuk.

4.13. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}^2\to X_2$. Ekkor f *parciális függvényei* a (rögzített y melletti)

$$f(\cdot,y):\mathbb{R}\to X_2, x\mapsto f(x,y)$$

ill. (a rögzített x melletti)

$$f(x,\cdot):\mathbb{R}\to X_2, y\mapsto f(x,y)$$

függvények.

4.14. Állítás. *Ha f folytonos az $(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ pontban, akkor $f(\cdot,u_2)$ folytonos az u_1 helyen, $f(u_1,\cdot)$ pedig folytonos az u_2 helyen.*

Bizonyítás. Az $\varepsilon>0$ számhoz mindkét esetben ugyanaz a $\delta>0$ választható, mint f-hez. □

4.15. *Megjegyzés.* A fenti állítás megfordítása nem igaz!!! Legyen

$$K:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x>0, (x-1)^2+y^2=1\right\}.$$

Definiálja

$$f(x,y):=\begin{cases}1, & (x,y)\in K;\\ 0, & (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus K.\end{cases}$$

Ekkor f a (0,0) helyen nem folytonos. Másrészt $f(\cdot,0)\equiv 0$ és $f(0,\cdot)\equiv 0$ folytonos függvények.

A továbbiakban az egyváltozós függvények folytonosságáról és határértékéről tanult fontosabb tételek metrikus terek között ható függvényekre való általánosításával foglalkozunk.

4.16. Tétel (Függvényhatárértékre vonatkozó Cauchy-féle feltétel)**.** *Legyen (X_1,d_1) tetszőleges metrikus tér, (X_2,d_2)* teljes *metrikus tér, $H\subseteq X_1$, $f:H\to X_2$, $u\in H'$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

(a) f-nek létezik határértéke u-ban;
(b) $\forall\varepsilon>0$-hoz létezik $\delta>0$, hogy minden $x,y\in\dot{B}_1(u,\delta)\cap H$ esetén $d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Bizonyítás. $(a)\Rightarrow(b)$: Válasszunk a $v\in X_2$ határérték definíciója szerint létező δ-t $\frac{\varepsilon}{2}$-höz. Ekkor $x,y\in\dot{B}_1(u,\delta)\cap H$ esetén

$$d_2(f(x),f(y))\le d_2(f(x),v)+d_2(v,f(y))<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

$(b)\Rightarrow(a)$: Az átviteli elvet fogjuk igazolni. Legyen $H\setminus\{u\}\ni x_n\to u$. Megmutatjuk, hogy a 4.6. Tétel $(b)^*$ feltétele teljesül, vagyis $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens. Ehhez X_2 teljessége miatt elegendő belátni, hogy Cauchy-sorozat. Legyen $\varepsilon>0$ adva. A feltétel szerint ehhez létezik $\delta>0$, hogy minden $x,y\in\dot{B}_1(u,\delta)\cap H$ esetén $d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$. Node (x_n) konvergenciája miatt $\delta>0$-hoz van $N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, melyre $n,m\ge N$ esetén $x_n,x_m\in\dot{B}_1(u,\delta)$. Ekkor $d_2(f(x_n),f(x_m))<\varepsilon$, tehát $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat. □

4.17. Tétel (Kompozíciófüggvény folytonossága)**.** *Legyenek (X_i,d_i) metrikus terek, $i=1,2,3$, valamint $f_1:X_1\to X_2$, $f_2:X_2\to X_3$ függvények. Tegyük fel, hogy f_1 folytonos az $u_1\in X_1$ helyen, f_2 folytonos az $u_2:=f_1(u_1)$ helyen. Ekkor $f_2\circ f_1:X_1\to X_3$ folytonos az u_1 helyen.*

Bizonyítás. A 4.5. Tételbeli átviteli elvet fogjuk alkalmazni. Legyen $x_n\to u_1$ tetszőleges sorozat. Az f_1 folytonosságára vonatkozó átviteli elv alapján $f_1(x_n)\to f_1(u_1)=u_2$. Az f_2 függvény u_2-beli folytonosságát kihasználva

$$f_2(f_1(x_n))\to f_2(f_1(u_1))=f_2(u_2),$$

amiből az állítás következik. □

4.18. Tétel (Kompozíciófüggvény határértéke). *Legyenek* (X_i, d_i) *metrikus terek,* $i = 1,2,3$. *Továbbá legyenek* $H_1 \subset X_1$, $H_2 \subset X_2$ $u_1 \in H_1'$ *és* $f_1 : H_1 \to X_2$, $f_2 : H_2 \to X_3$ *függvények. Tegyük fel, hogy létezik*

$$\lim_{u_1} f_1 := u_2.$$

Az alábbi két állítás bármelyikéből következik, hogy

$$\exists \lim_{u_1} (f_2 \circ f_1) = u_3.$$

(i) $u_2 \in H_2$ *és* f_2 *folytonos* u_2*-ben,* $f_2(u_2) = u_3$*;*
(ii) $u_2 \in H_2'$ *és* $\exists \lim_{u_2} f_2 := u_3$*, továbbá* f_1 *injektív az* u_1 *egy környezetében (vagy* $u_2 \notin R(f_1)$*).*

Bizonyítás. A fenti bizonyításhoz hasonlóan, a 4.6. Tétel (a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv) segítségével történik. □

4.19. Példák. Az átviteli elv és a fenti tételek segítségével könnyen látható, hogy minden (n változós) polinomfüggvény és racionális törtfüggvény, valamint minden komplex polinomfüggvény folytonos.

A következő tétel az 1. évben megismert Weierstrass-tétel általánosítása metrikus terek között ható folytonos függvényekre.

4.20. Tétel (Weierstrass-tétel). *Legyenek* (X_i, d_i), $i = 1,2$ *metrikus terek,* $K \subset X_1$ sorozatkompakt *halmaz,* $f : K \to X_2$ *folytonos függvény. Ekkor*

$$f(K) := \{f(x) : x \in K\} \subset X_2$$

halmaz is sorozatkompakt.

Bizonyítás. Legyen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ adott sorozat. Meg kell mutatnunk, hogy kiválasztható belőle konvergens részsorozat, melynek határértéke $f(K)$-ban van. Node tudjuk, hogy minden n-re $y_n = f(x_n)$ valamely $x_n \in K$ pontra. Az így kapott $(x_n) \subset K$ sorozatból (K sorozatkompaktsága miatt) kiválasztható $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ konvergens részsorozat, melyre

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} := u \in K.$$

Másrészt f folytonos K-n, tehát az átviteli elv miatt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(u) \in f(K)$$

is teljesül. Tehát

$$y_{n_k} := f(x_{n_k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

megfelelő részsorozat. □

4.21. *Megjegyzés.* Az 1. évben tanult Bolzano-Weierstrass tétel szerint egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum sorozatkompakt. A fenti tétel alapján egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény értékkészlet-halmaza sorozatkompakt, a Bolzano-Darboux tétel alapján pedig tudjuk, hogy intervallum. Így a 2.38. Tétel szerint az $R(f)$ értékkészlet-halmaz egy korlátos és zárt intervallum, tehát van legnagyobb és legkisebb eleme. Ez a tavaly tanult Weierstrass-tétel.

Az alábbi definíció és az azt követő tétel szintén az egyváltozós függvényeknél megismertek általánosítása.

4.22. Definíció. Legyenek (X_i, d_i), $i = 1,2$ metrikus terek, $H \subset X_1$. Azt mondjuk, hogy az $f : H \to X_2$ függvény *egyenletesen folytonos* H*-n*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$, hogy minden $x, y \in H$, $d_1(x, y) < \delta$ esetén $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

4.23. *Megjegyzés.* Világos, hogy ha egy függvény egyenletesen folytonos H-n, akkor ott folytonos. Továbbá minden Lipschitz-tulajdonságú függvény egyenletesen is folytonos.

4.24. Tétel (Általánosított Heine-tétel). *Legyenek (X_i, d_i), $i=1,2$ metrikus terek, $K\subset X_1$* sorozatkompakt *halmaz, $f : K \to X_2$ folytonos függvény. Ekkor f egyenletesen folytonos K-n.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos K-n. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyhez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén vannak olyan $x_n, y_n \in K$ pontok, melyekre

$$d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \text{ de } d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Mivel az így definiált $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset K$ sorozat egy sorozatkompakt halmazban van, ezért létezik $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens részsorozat, melyre

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} := u \in K.$$

A feltétel alapján

$$d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \to 0, k \to \infty,$$

ezért

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k} = u$$

is teljesül. Az f függvény folytonossága miatt (a 4.5. Tételbeli átviteli elv szerint)

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f(u)$$

adódik, ami ellentmond a

$$d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}$$

feltételnek. □

5. Jordan-mérték $\mathbb{R}^n$-en

Először az $n=2$ (sík) esettel foglalkozunk. Olyan m területfüggvényt vagy *mérték*et akarunk definiálni, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

I. $m \geq 0$, $m(\emptyset) = 0$;
II. egybevágóságra invariáns;
III. additív: ha H és G mérhetőek és egymásba nem nyúlók (vagyis $\mathrm{int}H\cap\mathrm{int}G = \emptyset$), akkor $H\cup G$ is mérhető és $m(H\cup G) = m(H)+m(G)$;
IV. $m(Q) = 1$, ahol Q az egységnégyzet.

Tekintsük a sík koordinátatengelyekkel párhuzamos, $\frac{1}{2^k}$ oldalhosszúságú négyzetekre való rácsfelbontását. Ezen kis négyzetek területét (mértékét) a fentiek alapján $\frac{1}{4^k}$-nak definiáljuk. Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}^2$ *korlátos* halmaz. Jelölje $\overline{H}_k$ azon kis zárt négyzetek *unióját* a rácsból, melyek belemetszenek H-ba, $\underline{H}_k$ pedig azon kis zárt négyzetek *unióját*, melyek részei $\mathrm{int}H$-nak. Ezek mértéke $m(\overline{H}_k)$ ill. $m(\underline{H}_k)$ legyen az unióban szereplő négyzetek száma szorozva $\frac{1}{4^k}$-al. Világos, hogy

$$\underline{H}_k \subset \underline{H}_{k+1} \text{ és } \overline{H}_{k+1} \supset \overline{H}_k,$$

másrészt

$$m(\underline{H}_k) \leq m(\underline{H}_{k+1}) \text{ és } m(\overline{H}_{k+1}) \geq m(\overline{H}_k).$$

Ebből következik, hogy $(m(\underline{H}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő, $\left(m(\overline{H}_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, korlátos sorozatok.

5.1. Definíció. A fentiek alapján definiálhatjuk H *belső* ill. *külső mértékét* mint

$$\underline{m}(H) := \lim_{k\to\infty} m(\underline{H}_k),\ \overline{m}(H) := \lim_{k\to\infty} m(\overline{H}_k).$$

5.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz. Azt mondjuk, hogy H *(Jordan-)mérhető*, ha

$$\underline{m}(H) = \overline{m}(H) =: m(H).$$

5.3. Példa (Nem mérhető halmazra)**.** Legyen $H := Q \cap \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, az egységnégyzet racionális koordinátájú pontjai. Világos, hogy H külső mértéke 1, belső mértéke 0.

Mérhető halmazok fontos osztályát alkotják a *nullmértékű* halmazok.

5.4. Definíció. Azt mondjuk, hogy $H \subset \mathbb{R}^2$ *nullmértékű*, ha H mérhető és $m(H) = 0$.

5.5. Állítás. *$H \subset \mathbb{R}^2$ pontosan akkor nullmértékű, ha $m(\overline{H}_k) \to 0$, $k \to \infty$.*

Bizonyítás. Ha H nullmértékű, akkor a definícióból következik az állítás. Ha $m(\overline{H}_k) \to 0$, akkor $0 \le m(\underline{H}_k) \le m(\overline{H}_k)$ alapján $m(\underline{H}_k) \to 0$ is teljesül. □

5.6. Tétel. *$H \subset \mathbb{R}^2$ pontosan akkor mérhető, ha ∂H nullmértékű.*

Bizonyítás.

$$\partial H \subset \overline{H}_k \setminus \underline{H}_k = \overline{\partial H}_k \text{ minden } k \in \mathbb{N},$$

másrészt

$$m(\overline{\partial H}_k) = m(\overline{H}_k \setminus \underline{H}_k) = m(\overline{H}_k) - m(\underline{H}_k)$$

az additivitás miatt.
Ha H mérhető, akkor

$$m(\overline{\partial H}_k) = m(\overline{H}_k) - m(\underline{H}_k) \to 0, k \to \infty,$$

tehát ∂H nullmértékű a fenti állítás miatt.
Ha $m(\partial H) = 0$, akkor szintén a fenti állítás miatt

$$m(\overline{\partial H}_k) = m(\overline{H}_k) - m(\underline{H}_k) \to 0, k \to \infty,$$

vagyis $\overline{m}(H) = \underline{m}(H)$, így H mérhető. □

5.7. Következmény. *Ha $H, G \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmazok, akkor $H \cup G$, $H \cap G$, $H \setminus G$ is mérhetők.*

Bizonyítás. Könnyen igazolható (ld. gyakorlatok), hogy

$$\partial(H \cup G) \subset \partial H \cup \partial G,$$
$$\partial(H \cap G) \subset \partial H \cup \partial G,$$
$$\partial(H \setminus G) \subset \partial H \cup \partial G.$$

Így a fenti tételből következik az állítás. □

5.8. Állítás. *Ha H és G mérhetőek és egymásba nem nyúlók, akkor*

$$m(H \cup G) = m(H) + m(G).$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$m(\overline{(H\cup G)}_k)=m(\overline{H}_k)+m(\overline{G}_k)-m(F_k),$$

ahol F_k jelöli a $\partial H\cap\partial G$-be metsző $\frac{1}{2^k}$ oldalú négyzeteket, hiszen ezeket előtte kétszer számoltuk. Másrészt

$$m(F_k)=m(\overline{(\partial H\cap\partial G)}_k)\le m(\overline{\partial H}_k)\to 0,\ k\to\infty,$$

amiből az állítása definíció szerint következik. □

Egy halmaz mérhetőségét az alábbi módon is karakterizálhatjuk.

5.9. Állítás. *A $H\subset\mathbb{R}^2$ halmaz pontosan akkor mérhető, ha léteznek F_k és G_k, $k\in\mathbb{N}$ mérhető halmazok, melyek „közrefogják" H-t, vagyis*

$$F_k\subset H\subset G_k,\ k\in\mathbb{N},$$

továbbá

$$m(G_k)-m(F_k)\to 0,\ k\to\infty.$$

Bizonyítás. Ha H mérhető, akkor $F_k:=\underline{H}_k$ és $G_k:=\overline{H}_k$ választás jó. A másik irány bizonyításához adott $\varepsilon>0$-hoz kell keresnünk olyan k-t, hogy $m(\overline{H}_k)-m(\underline{H}_k)<\varepsilon$. A feltétel szerint található olyan $l\in\mathbb{N}$, melyre $m(G_l)-m(F_l)<\frac{\varepsilon}{3}$. Ha k elég nagy, akkor

$$m\left((\overline{G_l})_k\right)-m(G_l)<\frac{\varepsilon}{3}$$

és

$$m(F_l)-m\left((\underline{F_l})_k\right)<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Mivel a feltevés alapján

$$\overline{H}_k\subset(\overline{G_l})_k \text{ és } \underline{H}_k\supset(\underline{F_l})_k,$$

ezért

$$\begin{aligned}m(\overline{H}_k)-m(\underline{H}_k)&\le m\left((\overline{G_l})_k\right)-m\left((\underline{F_l})_k\right)\\&\le m\left((\overline{G_l})_k\right)-m(G_l)+m(G_l)-m(F_l)+m(F_l)-m\left((\underline{F_l})_k\right)<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

5.10. Következmény. *A H halmaz pontosan akkor nullmértékű, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz van olyan $G\supset H$ mérhető halmaz, melyre $m(G)<\varepsilon$.*

5.11. Állítás. *Ha H a koordinátatengelyekel párhuzamos oldalú téglalap, akkor mérhető és $m(H)=a\cdot b$, ahol a és b az oldalhosszúságai.*

Bizonyítás. Diadikus racionális koordinátájú csúcspontokkal rendelkező téglalapra a definícióból következik. Más esetben közelítsük a csúcspontok koordinátáit diadikus racionálisokkal – az így kapott téglalapok külső ill. belső mértéke tartani fog az eredeti téglalap külső ill. belső mértékéhez. □

5.12. Állítás. *Ha $f\in C[a,b]$, akkor*

$$\operatorname{graph}(f):=\{(x,f(x)):x\in[a,b]\}\subset\mathbb{R}^2$$

nullmértékű halmaz.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adva. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért $\frac{\varepsilon}{b-a}$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x-y| < \delta$, akkor $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Legyen

$$\Phi = \{a = x_0, x_1 \dots, x_n = b\} \in \mathcal{F}[a,b]$$

olyan felosztás, melynek finomsága kisebb, mint δ. Definiálja a $G \supset \mathrm{graph}(f)$ halmazt, $I_i := [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots n$ jelöléssel,

$$G := \bigcup_{i=1}^{n} \left(I_i \times [\min_{I_i} f, \max_{I_i} f] \right).$$

Ekkor

$$m(G) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \left(\max_{I_i} f - \min_{I_i} f \right) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon.$$

Az állítást az 5.10. Következmény alapján igazoltuk. □

5.13. Következmény. *A kör(lap), ellipszis stb. mérhető halmazok a síkon.*

Bizonyítás. Következik az 5.6. Tételből és a fenti állításból. □

A továbbiakban tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén bevezethetjük az m_n $\mathbb{R}^n$-beli (Jordan-)mértéket ill. mérhetőséget az $n = 2$ esettel analóg módon. A fentiekhez hasonlóan definiálhatjuk az $\mathbb{R}^n$ tér koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú, $\frac{1}{2^k}$ élhosszúságú n dimenziós „kockákra" való *rácsfelbontását*, vagyis egy kocka

$$\left[\frac{i_1}{2^k}, \frac{i_1+1}{2^k}\right] \times \left[\frac{i_2}{2^k}, \frac{i_2+1}{2^k}\right] \times \dots \times \left[\frac{i_n}{2^k}, \frac{i_n+1}{2^k}\right], \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$$

alakú. Egy ilyen kis kocka mértéke legyen $\frac{1}{2^{kn}}$. Adott $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz esetén jelölje most $\overline{H}_k$ azon kis zárt kockák *unióját* a rácsból, melyek belemetszenek H-ba, $\underline{H}_k$ pedig azon kis zárt kockák *unióját*, melyek részei $\mathrm{int}H$-nak. Ezek mértéke $m(\overline{H}_k)$ ill. $m(\underline{H}_k)$ legyen az unióban szereplő kockák száma szorozva $\frac{1}{2^{kn}}$-al. Világos, hogy

$$\underline{H}_k \subset \underline{H}_{k+1} \text{ és } \overline{H}_{k+1} \supset \overline{H}_k,$$

másrészt

$$m(\underline{H}_k) \le m(\underline{H}_{k+1}) \text{ és } m(\overline{H}_{k+1}) \ge m(\overline{H}_k).$$

Ebből következik, hogy $(m(\underline{H}_k))_{k\in\mathbb{N}}$ monoton növő, $\left(m(\overline{H}_k)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, korlátos sorozatok. A 2 dimenzióval analóg módon definiálhatjuk az $\underline{m}_n(H)$ és $\overline{m}_n(H)$ n dimenziós *belső* ill. *külső* mértéket mint $\lim_{k\to\infty} m_n(\underline{H}_k)$ ill. $\lim_{k\to\infty} m_n(\overline{H}_k)$.

5.14. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmazt *(Jordan-)mérhető halmaz*nak mondunk, ha külső és belső mértéke megegyezik, és

$$m_n(H) := \overline{m}_n(H) = \underline{m}_n(H)$$

a H *(Jordan-)mértéke.*

Könnyen látható, hogy az 5.5–5.10. Állítások az m_n n dimenziós Jordan-mértékre is érvényben maradnak. Az 5.11. Állítást úgy kell módosítani, hogy ha H egy n dimenziós, (koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú) *tégla*, vagyis

$$H := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n],$$

akkor H mérhető és

$$m_n(H) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n).$$

6. Riemann-integrál $\mathbb{R}^n$-en

6.1. Az n dimenziós integrál alaptulajdonságai. Az egydimenziós Riemann-integrálhoz hasonlóan, az n dimenziós Jordan-mérték segítségével definiálni fogjuk $f : H \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ korlátos függvények Riemann-integrálját, ahol H mérhető halmaz.

6.1. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz *felosztása* egy $\Phi := \{H_1, \dots H_N\}$ egymásba nem nyúló, nemüres mérhető halmazokból álló rendszer, ahol

$$H = \bigcup_{i=1}^{N} H_i.$$

A H halmaz felosztásainak halmazát jelölje $\mathcal{F}(H)$.

6.2. Példa. Legyenek $T_1, \dots, T_N$ az $\mathbb{R}^n$ tér egy rácsfelbontásának azon téglái, melyekre $T_i \cap H \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, N$. Legyen $H_i := H \cap T_i$, $i = 1, \dots, N$. Ekkor $\{H_1, \dots H_N\}$ a H halmaz egy *rácsszerű felosztását* adja.

6.3. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^n$ mérhető, $\Phi := \{H_1, \dots H_N\}$ a H egy felosztása. Ekkor az f Φ felosztáshoz tartozó *alsó* ill. *felső közelítőösszege*

$$s_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{N} \left(\inf_{H_i} f \right) \cdot m_n(H_i)$$

ill.

$$S_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{N} \left(\sup_{H_i} f \right) \cdot m_n(H_i).$$

6.4. Definíció. Ha $\Phi := \{H_1, \dots H_N\}$ és $\Psi := \{G_1, \dots, G_M\}$ a $H \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz felosztásai, akkor

$$\Phi \vee \Psi := \{H_i \cap G_j \neq \emptyset : i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M\}$$

a Φ és Ψ felosztások *közös finomítása.*

Az előző félév 3.6 Tételéhez hasonlóan belátható, hogy tetszőleges Φ, Ψ felosztásokra

$$s_f(\Phi) \leq s_f(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Psi),$$

speciálisan

$$s_f(\Phi) \leq S_f(\Psi).$$

6.5. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^n$ mérhető. Az f *Darboux-féle alsó integrálja*

$$\int_{*H} f := \sup \{s_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}(H)\},$$

Darboux-féle felső integrálja

$$\int_H^* f := \inf \{S_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}(H)\}.$$

A fentiekből nyilvánvaló, hogy

$$\int_{*H} f \le \int^{*}_{H} f.$$

6.6. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy a Darboux-féle integrálok definíciójában elég rácsszerű felosztásokat venni.

Ezek alapján már definiálhatjuk a Riemann-integrálhatóságot.

6.7. Definíció. Legyen $f: H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^n$ mérhető. Azt mondjuk, hogy f *Riemann-integrálható* H-n, ha

$$\int_{*H} f = \int^{*}_{H} f.$$

A közös értéket jelölje

$$\int_H f.$$

A H halmazon Riemann-integrálható függvények halmazát jelölje $R(H)$.

A továbbiakban kimondunk az egydimenziós Riemann-integrálnál tanultakhoz analóg integrálhatósági kritériumokat. A bizonyítások egy az egyben átvihetők n dimenziós integrálra. A tételek kimondásához szükségünk lesz néhány definícióra.

6.8. Definíció. Az $f: H \to \mathbb{R}$ függvény $\Phi \in \mathcal{F}(H)$ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összege*

$$\Omega_f(\Phi) := S_f(\Phi) - s_f(\Phi).$$

A $\Phi := \{H_1, \ldots H_N\}$ felosztás *finomságán* a

$$|\Phi| := \sup\{\operatorname{diam} H_i : i = 1, \ldots, N\}$$

(pozitív) számot értjük. Azt mondjuk, hogy a $\xi \in \mathbb{R}^N$ egy, a Φ *felosztásra illeszkedő vektor* – jelölésben $\xi \propto \Phi$ – ha $\xi_i \in H_i$, $i = 1, \ldots, N$. Az f függvény (Φ, ξ) párhoz tartozó *Riemann-féle közelítőösszege*:

$$\sigma_f(\Phi, \xi) := \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) \cdot m_n(H_i).$$

6.9. Tétel. *Legyen $f: H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^n$ mérhető. Az f Riemann-integrálhatóságával az alábbi feltételek bármelyike ekvivalens.*

I. *(Leghasznosabb kritérium) Minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\Phi \in \mathcal{F}(H)$ felosztás, hogy*

$$\Omega_f(\Phi) < \varepsilon.$$

II. *(Riemann-féle kritérium) Található olyan $A \in \mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}(H)$, $|\Phi| < \delta$ és minden $\xi \propto \Phi$ esetén*

$$|\sigma_f(\Phi, \xi) - A| < \varepsilon.$$

Ekkor

$$A = \int_H f.$$

Bizonyítás. Az előző félév 3.12 és 3.22. Tételeinek bizonyításával megegyező módon történik. □

Összefoglaljuk a Riemann-integrál legfontosabb tulajdonságait.

6.10. Tétel. *Legyenek $f,g\in R(H)$, $c\in\mathbb{R}$.*

I. Ekkor $f+g\in R(H)$ és $c\cdot f\in R(H)$, valamint

$$\int_H (f+g)=\int_H f+\int_H g,$$

$$\int_H (c\cdot f)=c\cdot\int_H f.$$

II. Ha $f\le g$, akkor

$$\int_H f\le\int_H g.$$

Bizonyítás. Az előző félév 3.26. Állításával analóg módon. □

6.11. Tétel. *Legyenek $A,B\subset\mathbb{R}^n$ egymásba nem nyúló mérhető halmazok, $f|_A$ integrálható A-n és $f|_B$ integrálható B-n. Ekkor f integrálható $A\cup B$-n is és*

$$\int_{A\cup B} f=\int_A f+\int_B f.$$

Bizonyítás. Legyenek $\Phi=\{A_1,\dots,A_N\}\in\mathcal{F}(A)$, $\Psi=\{B_1,\dots,B_M\}\in\mathcal{F}(B)$ tetszőleges felosztások. Ekkor

$$\Gamma:=\{A_1,\dots,A_N,B_1,\dots,B_M\}\in\mathcal{F}(A\cup B),$$

továbbá

$$s_f(\Gamma)=s_f(\Phi)+s_f(\Psi)\le\int_{*\,A\cup B} f\le\int^{*}_{A\cup B} f\le S_f(\Phi)+S_f(\Psi)=S_f(\Gamma).$$

Ebből a bal oldal szuprémumát, a jobb oldal infimumát véve minden $\Phi\in\mathcal{F}(A)$ és $\Psi\in\mathcal{F}(B)$ felosztásra kapjuk, hogy

$$\int_A f+\int_B f=\int_{*\,A} f+\int_{*\,B} f\le\int_{*\,A\cup B} f\le\int^{*}_{A\cup B} f\le\int^{*}_{A} f+\int^{*}_{B} f=\int_A f+\int_B f,$$

amiből az állítás következik. □

Ezen tétel fontos következménye, hogy minden integrál tekinthető téglán vett integrálnak.

6.12. Tétel. *Legyen $T\subset\mathbb{R}^n$ tégla, $H\subset T$ mérhető halmaz, $f\in R(H)$. Ekkor az*

$$\tilde f(x):=\begin{cases} f(x), & x\in H;\\ 0, & x\in T\setminus H\end{cases}$$

módon definiált $\tilde f:T\to\mathbb{R}$ függvény integrálható T-n és

$$\int_T\tilde f=\int_H f.$$

Bizonyítás. Mivel H és $T\setminus H$ mérhető, egymásba nem nyúló halmazok, ezért alkalmazható az előző tétel, amiből

$$\int_T\tilde f=\int_H\tilde f+\int_{T\setminus H}\tilde f=\int_H f.$$

□

Szintén a 6.11. Tétel következménye az alábbi állítás.

6.13. Következmény. *Legyenek $B \subset A$ mérhető halmazok, f integrálható A-n. Ekkor $f|_B$ (f megszorítása B-re) integrálható B-n.*

Az egyváltozós esetben láttuk, hogy minden $f \in C[a,b]$ folytonos függvény Riemann-integrálható, és a bizonyításban f egyenletes folytonosságát használtuk fel (ld. előző félév 3.15 Tétel). Ennek megfelelően n dimenzióban fel kell tenni a H értelmezési tartomány mérhetősége mellett a kompaktságát.

6.14. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ mérhető kompakt halmaz, $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f Riemann-integrálható H-n.*

Bizonyítás. A 6.9. Tétel (i) állítását fogjuk felhasználni. Legyen $\varepsilon>0$ adva. Mivel a feltételek miatt a 4.24. Tétel szerint f egyenletesen is folytonos H-n, azért $\frac{\varepsilon}{m_n(H)}>0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{m_n(H)}, \text{ ha } d_e(x,y) < \delta,$$

ahol d_e az n dimenziós euklideszi távolságot jelöli. Válasszunk H-nak egy olyan $\Phi = \{H_1, \dots, H_N\}$ felosztását, amelyben $\operatorname{diam} H_i < \delta$, $i = 1, \dots, N$ (ilyen létezik, pl. vehetünk $\frac{1}{2^k}$ oldalú rácsszerű felosztást, ahol $\frac{\sqrt{2}}{2^k} < \delta$). Ekkor a feltétel szerint

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{N} \sup\{f(x)-f(y) : x, y \in H_i\} \cdot m_n(H_i) \le \frac{\varepsilon}{m_n(H)} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_n(H_i) = \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk. □

A következő fontos tételek arról szólnak, hogy mi köze az integrálnak a mértékhez.

6.15. Tétel. *Legyen $H \subset T \subset \mathbb{R}^n$, ahol H tetszőleges halmaz, T tégla. Jelölje*

$$\chi_H(x) := \begin{cases} 1, & x \in H; \\ 0, & x \in T \setminus H, \end{cases} \tag{6.1}$$

a H halmaz karakterisztikus függvényét *T-n. Ekkor*

$$\underline{m}_n(H) = \int_{*T} \chi_H, \quad \overline{m}_n(H) = \int_T^{*} \chi_H.$$

Bizonyítás. A felső integrálra-külső mértékre vonatkozó állítást bizonyítjuk, a másik hasonlóan megy. Legyen $\varepsilon > 0$ adva. A külső mérték definíciója szerint található olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy az $\mathbb{R}^n$ tér $\frac{1}{2^k}$ oldalú kockákra való felbontásának elemeit $\{T_j\}$-vel jelölve,

$$\sum_{T_j \cap H \neq \emptyset} m_n(T_j) \le \overline{m}_n(H) + \varepsilon.$$

Világos, hogy a $T_j \cap T \neq \emptyset$ alakú halmazokat tartalmazó $\Phi = \{F_1, \dots, F_N\}$ rendszer a T egy felosztását adja, így

$$\int_T^{*} \chi_H \le \sum_{i=1}^{N} (\sup_{F_i} \chi_H) \cdot m_n(F_i) = \sum_{F_i \cap H \neq \emptyset} m_n(F_i) \le \sum_{T_j \cap H \neq \emptyset} m_n(T_j) \le \overline{m}_n(H) + \varepsilon,$$

hiszen $F_i \cap H = T_j \cap T \cap H = T_j \cap H$. Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért

$$\int_T^{*} \chi_H \le \overline{m}_n(H).$$

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához jelölje $\{T_l\}$ az $\mathbb{R}^n$ egy tetszőleges rácsfelbontásának elemeit. Ekkor a $T_l \cap T \neq \emptyset$ alakú halmazokat tartalmazó $\Psi = \{G_1, \ldots, G_M\}$ rendszer a T egy felosztását adja. Ebből

$$\overline{m}_n(H) \leq \sum_{G_i \cap H \neq \emptyset} m_n(G_i) = \sum_{G_i \cap H \neq \emptyset} 1 \cdot m_n(G_i) + \sum_{G_i \cap H = \emptyset} 0 \cdot m_n(G_i) = S_{\chi_H}(\Psi),$$

amiből

$$\overline{m}_n(H) \leq \int_T^* \chi_H.$$

□

6.16. Következmény. *Egy $H \subset T$ halmaz pontosan akkor mérhető, ha a (6.1) szerint definiált χ_H Riemann-integrálható T-n. Ekkor*

$$m_n(H) = \int_T \chi_H.$$

6.17. Tétel (Az integrál geometriai jelentése)**.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}^n$ mérhető. Egy $f : H \to \mathbb{R}^+$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha*

$$\operatorname{subgraph}(f) := \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) : (x_1, \ldots, x_n) \in H,\ 0 \leq x_{n+1} \leq f(x_1, \ldots, x_n)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

Jordan-mérhető. Ekkor

$$\int_H f = m_{n+1}\left(\operatorname{subgraph}(f)\right).$$

Bizonyítás. Következik a mérhetőség definíciójából és a 6.6. Megjegyzésből. □

6.2. Fubini tétele, integráltranszformáció. A következőkben az integrálszámítás egy fontos alaptételét, az integrálás sorrendjének felcserélhetőségét bizonyítjuk 2 dimenzióban. A tétel téglán (téglalapon) vett integrálról szól – de a 6.12. Tétel alapján tudjuk, hogy ez nem jelent megszorítást.

6.18. Tétel (Fubini tétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $I_1 = [a, b]$ és $I_2 = [c, d]$ korlátos és zárt intervallumok.*
(A) változat. Tegyük fel, hogy f-re teljesülnek az alábbi feltételek:

$$(A) \begin{cases} f \in R(I_1 \times I_2), \ \text{és} \\ \forall x \in I_1 \ \text{esetén az } y \mapsto f(x, y),\ y \in I_2 \ \text{függvény Riemann-integrálható } I_2\text{-ben.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\varphi(x) := \int_{I_2} f(x, \cdot) = \int_c^d f(x, y)dy, \quad x \in I_1$$

jelöléssel φ Riemann-integrálható I_1-ben, emellett

$$\int_{I_1 \times I_2} f = \int_{I_1} \varphi = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx.$$

(B) változat. Tegyük fel, hogy f-re teljesülnek az alábbi feltételek:

$$(B) \begin{cases} f \in R(I_1 \times I_2), \ \text{és} \\ \forall y \in I_2 \ \text{esetén az } x \mapsto f(x, y),\ x \in I_1 \ \text{függvény Riemann-integrálható } I_1\text{-ben.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\psi(x) := \int_{I_1} f(\cdot, y) = \int_a^b f(x,y)dx, \quad y \in I_2$$

jelöléssel ψ Riemann-integrálható I_2-ben, emellett

$$\int_{I_1\times I_2} f = \int_{I_2} \psi = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

6.19. Következmény. *Ha f-re teljesülnek az (A) és (B) változat feltételei, akkor*

$$\int_{I_1\times I_2} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy,$$

vagyis az x és y szerinti integrálás sorrendje felcserélhető, és az így kapott integrálok értékei megegyeznek a függvény kétdimenziós integráljával.

6.20. *Megjegyzés.* Az (A) ill. (B) változat feltételei közül az első mindig teljesül, ha f folytonos $I_1 \times I_2$-n, ld. 6.14. Tétel.

Fubini-tétel (A) változat bizonyítása. Legyen $\Phi_1 := \{J_1, \dots J_n\} \in \mathcal{F}(I_1)$ az I_1 intervallum egy tetszőleges felosztása, $\Phi_2 := \{K_1, \dots K_m\} \in \mathcal{F}(I_2)$ az I_2 intervallum egy tetszőleges felosztása. Ekkor

$$\Phi := \{J_i \times K_l : i = 1, \dots, n, l = 1, \dots, m\} \in \mathcal{F}(I_1 \times I_2)$$

az $I_1 \times I_2$ tégla egy (mondhatjuk rácsszerű) felosztását adja. A φ Riemann-integrálhatóságának bizonyításához az integrálhatóság Riemann-féle kritériumát fogjuk felhasználni (ld. előző félév 3.22. Tétel). Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \propto \Phi_1$ a Φ_1 felosztásra illeszkedő vektor. Ekkor

$$m_{il} := \inf_{J_i\times K_l} f \text{ és } M_{il} := \sup_{J_i\times K_l} f$$

jelöléssel $m_{il} \le f(\xi_i, y) \le M_{il}$ minden $y \in I_2$ esetén. Másrészt

$$\varphi(\xi_i) = \int_{I_2} f(\xi_i, y)dy = \sum_{l=1}^m \int_{K_l} f(\xi_i, y)dy.$$

Ezekből φ-nek a Φ_1 felosztáshoz és ξ vektorhoz tartozó

$$\sigma_\varphi(\Phi_1, \xi) = \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \cdot |J_i| = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \left(\int_{K_l} f(\xi_i, y)dy \right) \cdot |J_i|$$

Riemann-összegét a következő módon becsülhetjük:

$$s_f(\Phi) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m m_{il} \cdot |K_l| \cdot |J_i| \le \sigma_\varphi(\Phi_1, \xi) \le \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m M_{il} \cdot |K_l| \cdot |J_i| = S_f(\Phi).$$

Ebből ε-technikával, a 6.6. Megjegyzés alapján következik, hogy φ Riemann-integrálható és integrálja megegyezik f $I_1 \times I_2$-n vett integráljával.
A (B) változat analóg módon bizonyítható. □

6.21. *Megjegyzés.* Fubini tétele általánosítható tetszőleges $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényre. Pl. $n = 3$ esetén egy $f \in R(I_1 \times I_2 \times I_3)$ függvény integrálja megfelelő feltételek mellett előáll 3 db. egydimenziós integrál iterációjaként.

6.22. Példa (Olyan függvényre, melyre nem teljesül a Fubini-tétel)**.** Legyen $f:[0,1]\times\times[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y):=\begin{cases}\frac{1}{y^2}, & 0<x<y<1;\\ -\frac{1}{x^2}, & 0<y<x<1;\\ 0, & \text{különben.}\end{cases}$$

Ekkor

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^y \frac{1}{y^2}dx+\int_y^1\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{y}+\left[\frac{1}{x}\right]_{x=y}^{x=1}\right)dy=1.$$

Másrészt

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx=\int_0^1\left(\int_0^x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dy+\int_x^1\frac{1}{y^2}dy\right)dx=\int_0^1\left(-\frac{1}{x}+\left[-\frac{1}{y}\right]_{y=x}^{y=1}\right)dx=-1.$$

Nyilván f nem integrálható $[0,1]\times[0,1]$-en.

Fubini tételét alkalmazhatjuk egydimenziós integrálok kiszámítására is.

6.23. Példa. Számítsuk ki az

$$\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}dx$$

integrál értékét!

$$\int_0^1\left(\int_0^1 x^y dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{y\ln x}dy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{\ln x}\mathrm{e}^{y\ln x}\right]_{y=0}^{y=1}dx=\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}dx.$$

Fubini tétele alapján

$$\int_0^1\left(\int_0^1 x^y dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^1 x^y dx\right)dy=\int_0^1\left[\frac{1}{y+1}x^{y+1}\right]_{x=0}^{x=1}dy=\int_0^1\frac{1}{y+1}dy=\ln 2.$$

Tehát

$$\int_0^1\frac{x-1}{\ln x}dx=\ln 2.$$

A Fubini-tétel következménye az alábbi két állítás.

6.24. Definíció. Legyenek $\varphi_1,\varphi_2\in C[a,b]$ folytonos függvények, $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$ minden $x\in\in(a,b)$. (Kétdimenziós) *normáltartomány* alatt a következő alakú korlátos és zárt (sorozatkompakt) halmazokat értjük:

$$H=\{(x,y)\in[a,b]\times\mathbb{R}:\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}\tag{6.2}$$

vagy

$$H=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times[a,b]:\varphi_1(y)\le x\le\varphi_2(y)\}\,.\tag{6.3}$$

6.25. Állítás. *Legyen $H\subset\mathbb{R}^2$ a (6.2) vagy* (6.3) *alakú normáltartomány, $f:H\to\mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor a (6.2) esetben*

$$\int_H f=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy\right)dx,$$

a (6.3) esetben

$$\int_H f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Bizonyítás. Mivel H mindkét esetben korlátos, azért $H \subset I_1 \times I_2$, ahol I_1, I_2 egydimenziós intervallumok. Definiáljuk

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in H; \\ 0, & (x,y) \in (I_1 \times I_2) \setminus H. \end{cases}$$

Az állítás a 6.12. és a 6.18. Tételekből következik. □

6.26. Állítás (Cavalieri-elv)**.** *Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$ 3 dimenziós testek, és tegyük fel, hogy minden $z \in [0, +\infty)$ esetén a z magasságban vett, xy síkkal párhuzamos síkmetszetük területe megegyezik, vagyis minden $z \in [0, +\infty)$ esetén*

$$\varphi_A(z) := m_2\left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in A\right\}\right) = m_2\left(\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y,z) \in B\right\}\right) = \varphi_B(z).$$

Ekkor $m_3(A) = m_3(B)$, vagyis a két test térfogata is megegyezik.

Bizonyítás. Legyen $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [0, c]$ olyan tégla, melybe A és B is belefoglalható. Definiáljuk A és B karakterisztikus függvényét T-n:

$$\chi_A(x,y,z) := \begin{cases} 1, & (x,y,z) \in A; \\ 0, & (x,y,z) \in T \setminus A. \end{cases}$$

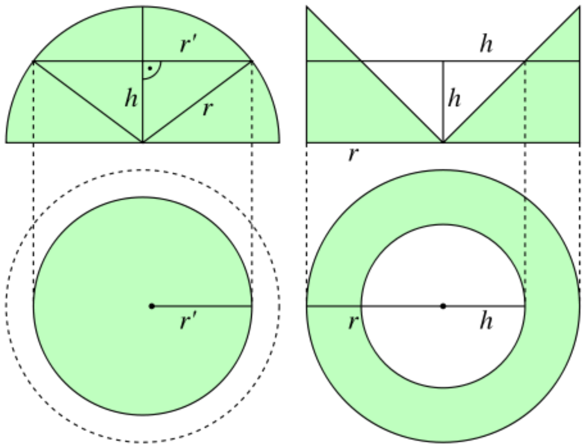
$$\chi_B(x,y,z) := \begin{cases} 1, & (x,y,z) \in B; \\ 0, & (x,y,z) \in T \setminus B. \end{cases}$$

A 6.16. Következmény és a 6.18. Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned} m_3(A) &= \int_T \chi_A = \int_0^c \left(\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \chi_A(x,y,z)dxdy \right) dz = \int_0^c \varphi_A(z)dz \\ &= \int_0^c \varphi_B(z)dz = \int_0^c \left(\int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \chi_B(x,y,z)dxdy \right) dz = \int_T \chi_B = m_3(B). \end{aligned}$$

□

6.27. Példa (A félgömb térfogata)**.** Az r sugarú félgömb térfogata megegyezik annak a testnek a térfogatával, melyek úgy kapunk, hogy egy r magasságú hengerből kiveszünk egy r alapsugarú, r magasságú kúpot. Az alábbi ábrán látható, hogy a h magasságú síkmetszet a gömb esetén egy $\sqrt{r^2 - h^2}$ sugarú körlap, a másik test esetén egy körgyűrű, amit úgy kapunk, hogy egy r sugarú körlapból kiveszünk egy h sugarú körlapot. Tehát a síkmetszet területe mindkét esetben $(r^2 - h^2) \cdot \pi$.



A továbbiakban az előző félévből ismert helyettesítéses integrálás elvét (ld. 3.25. Tétel) fogjuk általánosítani n dimenzióra.
Emlékeztető
Legyen $I=[a,b]$ intervallum, $f\in R[a,b]$ és $f\in D'[a,b]$. Legyen továbbá $I^*=[\alpha,\beta]$ intervallum, $g:I^*\to I$ differenciálható bijekció, melyre $(f\circ g)\cdot g'\in R[\alpha,\beta]$. Ekkor

$$\int_H f = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f\circ g)\cdot g' = \int_{I^*} (f\circ g)\cdot |g'|.$$

Hasonló képletet fogunk igazolni. Ehhez szükségünk lesz a parciális derivált fogalmára.

6.28. Definíció. Legyen $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $a=(a_1,\dots,a_n)\in D(f)$ adott pont. Jelölje $i=1,\dots,n$ esetén F_i vagy $F_{i,a}$ a következő $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt:

$$F_i(x)=F_{i,a}(x):=f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n)\in\mathbb{R},$$

ahol

$$x\in D(F_i)=\{x\in\mathbb{R}:(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n)\in D(f)\}.$$

Ez a halmaz nem üres, hiszen $a_i\in D(F_i)$. Az így kapott $F_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt az f függvény a pontbeli i. *parciális függvényé*nek nevezzük.

6.29. Definíció. Az f függvényt az $a\in\mathbb{R}^n$ pontban az i. változó szerint *parciálisan folytonos*nak, ill. *parciálisan differenciálható*nak nevezzük, ha az $F_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény az a_i pontban folytonos ill. differenciálható (ez utóbbi esetben azt is fel kell tenni, hogy $a_i\in\operatorname{int}D(F_i)$). Az $F_i'(a_i)$ számot az f függvény i. változó szerinti *parciális derivált*jának nevezzük a-ban és jelöljük:

$$\partial_i f(a):=F_i'(a_i).$$

Ez tehát az

$$\mathbb{R}\ni x\mapsto f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n)$$

$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény deriváltja a_i-ben. Az f függvény i. *parcális deriváltfüggvénye* a

$$\partial_i f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\ (\partial_i f)(a):=\partial_i f(a)$$

függvény.

Ezek alapján már definiálhatjuk $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvények *deriváltmátrixát*. Emlékezzünk vissza, hogy a 4.10. Definícióban bevezettük az ilyen függvények $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *koordinátafüggvényei*t úgy, hogy

$$g = (g_1, \dots, g_n), \text{ és } g_i(x) := (g(x))_i,\ x \in D(g);\ i = 1, \dots, n.$$

A fentiek szerint definiálhatjuk ezen koordinátafüggvények parciális deriváltjait ill. parciális deriváltfüggvényeit egy $a \in \mathrm{int} D(g)$ pontban (ha léteznek).

6.30. Definíció. Legyen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ adva, és tegyük fel, hogy az $a \in D(g)$ pontban léteznek a $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvények minden változó szerinti parciális deriváltjai, vagyis léteznek a $\partial_k g_i(a) \in \mathbb{R}$ parciális deriváltak $i, k = 1, \dots, n$. A g függvény *deriváltmátrixa* (vagy *Jacobi-mátrixa*) az a pontban:

$$g'(a) := \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(a) & \cdots & \partial_n g_1(a) \\ \partial_1 g_2(a) & \cdots & \partial_n g_2(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_n(a) & \cdots & \partial_n g_n(a) \end{pmatrix}.$$

Ha minden $x \in D(g)$ pontban létezik a g deriváltmátrixa, akkor beszélhetünk a

$$g' : D(g) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

*deriváltfüggvény*ről, ahol $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ az $n \times n$-es valós mátrixok algebráját jelöli.
A g *Jacobi-determinánsa* az a pontban a

$$\det g'(a) := \begin{vmatrix} \partial_1 g_1(a) & \cdots & \partial_n g_1(a) \\ \partial_1 g_2(a) & \cdots & \partial_n g_2(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_n(a) & \cdots & \partial_n g_n(a) \end{vmatrix}$$

determináns.

6.31. Tétel (Integráltranszformáció)**.** *Legyenek $H, K \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmazok. Legyen $g :$ $: \mathrm{int}K \to \mathrm{int}H$ olyan bijekció, melyre minden $i, k = 1, \dots, n$ esetén $\partial_k g_i$ létezik és folytonos $\mathrm{int}K$-ban (ebből következik, hogy a $\det g' : \mathrm{int}K \to \mathbb{R}$ függvény is folytonos, hiszen folytonos függvények szorzataiból és ezek összegeiből áll elő). Tegyük fel, hogy minden $\partial_k g_i$ korlátos (így $\det g'$ folytonos és korlátos). Ha $f \in R(H)$, akkor*

$$\int_H f = \int_K (f \circ g) \cdot |\det g'|.$$

6.32. Példa. Legyen $H := \{(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) : (r, \varphi) \in K\}$, $g(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ *polártranszformáció*. Ekkor

$$\det g' = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$