Analízis IV. - zh
Mezei István
2007. márc. 28.

1. A $\sum n\frac{3^n}{n!}id^n$ hatványsor esetén
   (a) adja meg az R konverkenciasugarat,
   (b) mi a KH$\sum n\frac{3^n}{n!}id^n$ konvergenciahamlaz,
   (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\frac{3^n}{n!}id^n =?$
2. Kiindulva a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ azonosságból
   (a) számolja ki a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ összeget,
   (b) mutassa meg, hogy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} = \ln 4$!
3. Oldja meg az $xy' = \sqrt{1+y^2}$ differenciálegyenletet! Van-e olyan megoldása, amelyre $y(1) = 0$?
4. Adja meg az $y' = \frac{y}{x} + x$ differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását!
5. (a) Mutassa meg, hogy a $\varphi : [0,\infty) \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) := \frac{t}{1+t}$ szigorúan monoton növekedő!
   (b) Legyen $d : \mathbf{R}\times\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Mutassa meg, hogy az $(\mathbf{R}, d)$ metrikus tér!
   (c) Adja meg az $(\mathbf{R}, d)$ metrikus téren a B(0,1) környezetet!
6. Mutassa meg, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonos függvény zérushelyei zárt halmazt alkotnak (az $(\mathbf{R}, |x-y|)$ metrikus térben)!

2007. márc. 30.

1. A $\sum \frac{3^n}{(n+1)!} id^{n+1}$ hatványsor esetén

   (a) adja meg az R konverkenciasugarat,

   (b) adja meg a $\sum \frac{3^n}{(n+1)!} id^{n+1}$ konvergenciahamlazát,

   (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} id^{n+1} =?$

2. Kiindulva a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$) azonosságból

   (a) mutassa meg, hogy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sin\alpha)^{2n} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
   ($\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$)),

   (b) mutassa meg, hogy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+1}(2n+1)} = \mathrm{arctg}\frac{1}{3}$!

3. Oldja meg az $y'\sqrt{1+x^2} = y$ differenciálegyenletet! Van-e olyan megoldása, amelyre $y(0) = 1$?

4. Adja meg az $y' = \frac{y+x^2}{x}$ differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását a $(0, +\infty)$ intervallumon!

5. (a) Mutassa meg, hogy bármely $a > 0$ esetén a $\varphi : [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $\varphi(t) := \mathrm{arctg}a + \mathrm{arctg}x - \mathrm{arctg}(a + x)$ függvény szigorúan monoton növekedő!

   (b) Legyen $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $d(x, y) := \mathrm{arctg}|x - y|$. Mutassa meg, hogy az $(\mathbf{R}, d)$ metrikus tér!

   (c) Adja meg az $(\mathbf{R}, d)$ metrikus térben a $B(0, \frac{\pi}{2})$ környezetet!

6. Mutassa meg, hogy az $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ folytonosan differenciálható függvény lokális szélsőértékhelyeinek halmaza zárt (az $(\mathbf{R}, |x - y|)$ metrikus térben)!