Analízis V előadás 2007 őszi félév

1. előadás

$\underline{x} \in \mathbb{R}^p$ $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $\underline{e}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$ standard bázist rögzítünk.

$\underline{x} \in \mathbb{R}^p$

$\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_{p-1}, x_p) = x_1 \bullet \underline{e}_1 + x_2 \bullet \underline{e}_2 + ... + x_{p-1} \bullet \underline{e}_{p-1} + x_p \bullet \underline{e}_p$

$\underline{y} = (y_1, y_2, ..., y_{p-1}, y_p) = y_1 \bullet \underline{e}_1 + y_2 \bullet \underline{e}_2 + ... + y_{p-1} \bullet \underline{e}_{p-1} + y_p \bullet \underline{e}_p$

$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = x_1 \bullet y_1 + x_2 \bullet y_2 + ... + x_{p-1} \bullet y_{p-1} + x_p \bullet y_p$

$\|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + ... + x_{p-1}^{\,2} + x_p^{\,2}} = \sqrt{\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle}$

$|\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle| \leq \|\underline{x}\| \bullet \|\underline{y}\|$

Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineárs függvény

Példa: A egy q×p-s mátrix mely, az f-nek lesz a leképezési mátrixa.

Példa:

Ha $f(\underline{x}) = A \bullet \underline{x}$

$\underline{x} = x_1 \bullet \underline{e}_1 + x_2 \bullet \underline{e}_2 + ... + x_{p-1} \bullet \underline{e}_{p-1} + x_p \bullet \underline{e}_p$ és

$A: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, a linearitást felhasználva

$$A(\underline{x}) = x_1 \bullet \underbrace{A(\underline{e}_1)}_{a_1} + x_2 \bullet \underbrace{A(\underline{e}_2)}_{a_2} + ... + x_{p-1} \bullet \underbrace{A(\underline{e}_{p-1})}_{a_{p-1}} + x_p \bullet \underbrace{A(\underline{e}_p)}_{a_p} =$$

$$= x_1 \bullet \underline{a}_1 + x_2 \bullet \underline{a}_2 + ... + x_{p-1} \bullet \underline{a}_{p-1} + x_p \bullet \underline{a}_p =$$

$$= x_1 \bullet \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ . \\ . \\ . \\ a_{q1} \end{bmatrix} + x_2 \bullet \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ . \\ . \\ . \\ a_{q2} \end{bmatrix} + ... + x_{p-1} \bullet \begin{bmatrix} a_{1p-1} \\ a_{2p-1} \\ . \\ . \\ . \\ a_{qp-1} \end{bmatrix} + x_p \bullet \begin{bmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ . \\ . \\ . \\ a_{qp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a_{11} + x_2 a_{12} + ... + x_{p-1} a_{1p-1} + x_p a_{1p} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_1 a_{q1} + x_2 a_{q2} + ... + x_{p-1} a_{qp-1} + x_p a_{qp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1p-1} & a_{1p} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{q1} & a_{q2} & . & . & a_{qp-1} & a_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_{p-1} \\ x_p \end{bmatrix}$$

ez szintén q×p-s mátrix, melyet A-val jelölünk.

Az $A: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés folytonossága:

Tétel: Bármely lineáris leképezés folytonos, sőt egyenletesen is folytonos, ugyanis bármely $x \in \mathbb{R}^p$ esetén $\|A(x)\|^{(q)} \leq \|A\|^{(q,p)} \bullet \|x\|^p$ (Frobenius norma)

Bizonyítás:

$$\|A(x)\|^{(q)}=\left\|\sum_{i=1}^{p}x_i a_i\right\|^{(q)}\le\sum_{i=1}^{p}|x_i|\|a_i\|^{(q)}\le\left(\sum_{i=1}^{p}x_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\bullet\left(\left(\sum_{i=1}^{p}\|a_i\|^{(q)}\right)^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{q}a_{ji}^{2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\bullet\left(\sum_{i=1}^{p}x_i^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}=\|A\|^{(q,p)}\bullet\|x\|^{p}$$

A differenciálhányados fogalma:

Ismétlés

$f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $a\in D(f)$ belső pont, $\lim_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=A=f'(a)$.

Ezzel ekvivalens definíciók:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=A=f'(a)\Leftrightarrow\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)-Ah}{h}=0\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-A(x-a)}{x-a}=0\Leftrightarrow\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)-A(x-a)|}{|x-a|}=0$$

Ekkor már általánosíthatunk $f\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ függvényekre is.

1. definíció:

$\lim_{x\to a(\text{norm‡ban tart})}\dfrac{\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|}{\|x-a\|}=0$, ahol az A: $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ lineáris leképezés a differenciálhányados: $f'(a)=A$.

2. definíció:

$$\lim_{h\to0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|}{\|h\|}=0$$

3. definíció:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\|x-a\|<\delta\Rightarrow\|f(x)-f(a)-A(x-a)\|\le\varepsilon\|x-a\|$$

4. definíció:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\|h\|<\delta\Rightarrow\|f(a+h)-f(a)-Ah\|\le\varepsilon\|h\|$$

Egyértelmű-e az A?

Az A lineáris leképezés $\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ $a_{ij}:=\lim_{t\to0\,/t\in R/}\dfrac{f_i(a+te_j)-f_i(a)}{t}=D_j f_i$ az f_i koordinátafüggvény j-ik parciális deriváltja.

$f\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$, $f=(f_1,.......,f_q)=(f_i)_{i=1}^{q}$ koordináta függvények , $A=\begin{pmatrix}D_1f_1 & . & . & D_p f_1\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ D_p f_q & . & . & D_p f_q\end{pmatrix}$

Jakobi-mátrix.

Speciálisan:

$f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}^q$ deriváltja a-ban egy oszlopmátrix, ezt nevezzük sebességvektornak.

$f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ deriváltja a-ban egy sorvektor (skaláris szorzatnak felel meg).

Példa

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) \to \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$ mik a (0,0)-ban a parciális deriváltak? (nem folytonos a (0,0)-ban)

$$D_1 f = \frac{(x^2+y^2)2y - 2xy2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2y+2y^3-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^3-2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$ (0,0)-ban 0.

$$D_2 f = \frac{(x^2+y^2)2x - 2xy2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$ (0,0)-ban 0.

Tétel:

Ha $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezés differenciálható egy $a \in \operatorname{int}D(f)$-ben $\Rightarrow$ f folytonos.

Bizonyítás:

A harmadik definíció alapján $\left\| \|f(x)-f(a)\| - \|A(x-a)\| \right\| \leq \|f(x)-f(a)-A(x-a)\| \leq \varepsilon \|x-a\|$

$$\|f(x)-f(a)\| \leq \underbrace{\|A(x-a)\|}_{\leq \|A\| \bullet \|x-a\|} + \varepsilon\|x-a\| \leq \underbrace{(\|A\|+\varepsilon)}_{K}\|x-a\|$$

A trükk:

$x = x-y+y$, $\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|$,

$$\left.\begin{array}{l} \|x\| \leq \|x-y\| + \|y\| \\ \|y\| \leq \|y-x\| + \|x\| \end{array}\right\} \left\| \|x\| - \|y\| \right\| \leq \|x-y\|$$

$y = y-x+x$, $\|y\| \leq \|y-x\| + \|x\|$,

A feltétel szükséges:

A második definíciót felhasználva

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-A(h)\|}{\|h\|} = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{\left\langle f(a+h)-f(a)-A(h),\ e_i^{(q)} \right\rangle}{\|h\|} = 0$$, ahol az $e_i^{(q)}$ egységvektor

$f_i \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,q$

$\langle a,b \rangle = \|a\| \bullet \|b\|$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_i(a+h)-f_i(a)-\left\langle A(h),e_i^{(q)} \right\rangle}{\|h\|} = 0 \Rightarrow f_i'(a)(h) = \left\langle A(h),e_i^{(q)} \right\rangle$$ az A mátrix i-ik sorának és a h-nak a skaláris szorzata.

Példa:

Legyen $f \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$

$\varphi(t) = (e^{-t}\cos(t); e^{-t}\sin(t))$

$\varphi(t) = e^{-t}\cos(t)$

$\varphi(t) = e^{-t}\sin(t)$

$$D\varphi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) = -e^{-t}\cos(t) - e^{-t}\sin(t) \\ \varphi(t) = -e^{-t}\sin(t) + e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}$$

$$D\varphi(t) = -e^{-t}\begin{pmatrix} \cos(t) - \sin(t) \\ \sin(t) + \cos(t) \end{pmatrix}$$

$\|\varphi'(t)\|^2 = e^{-2t}(2)$

$\|\varphi'(t)\| = e^{-2t}\sqrt{2}$

$$2 = \cos^2 t + \sin(t)\cos(t) + \sin^2 t - 2\sin(t)\cos(t) + \cos^2 t$$

2. előadás

Legyen $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ leképezés differenciálható,
$f_i \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$; i=1,…….,q ezeket nevezzük koordinátafüggvényeknek.
Parciális függvényei $(f_i)_j \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (a j-ik parciális függvény), ami egyetlen változót, a j-et meghagyja, az összes többit pedig rögzíti.

Példák:

1. f(x,y)=2x+y
i=1 rögzített az $(f)_1=2x+y_0$ ekkor y_0 előre megadott érték lehet
$(f)_2=2x_0+y$
$D_1(f) = 2$, $D_2(f) = 1$ parciális deriváltak.

2. $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = x^{x^{x^x}} + (\ln x)(\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{arc\,tg}(\sin(\cos y) - \ln(x + y)))))$ $D_2 f(1, y) = D_2(1 + 0) = 0$.
A differenciálhányados szükséges feltétele a folytonosság

Állítás:

$f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ Ha az f_i (i=1,…..,q) koordinátafüggvények differenciálhatók az a-ban, akkor az $A_i = f_i'(a)$ jelöléssel az $1 \times p-s$ mátrixokból alkotott A $q \times p$ -s mátrixra kell, hogy $f'(a)=A$.

Bizonyítás:

$$\frac{\|f(x+h) - f(a) - A(h)\|}{|h|} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{q}(f_i(x+h) - f_i(a) - A_i(h))^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\|h\|} = \left(\sum_{i=1}^{q}\left(\frac{f_i(x+h) - f_i(a) - A_i(h)}{\|h\|}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$f'(a)=A$ $q \times p$-s mátrix elemeinek jelentése: $a_{ij} = \partial_i f_i(a)$

$$a_{ij} = \partial_j f_i(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f_i(a + te_j) - f_i(a)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f_i(a_1, a_2, ..., a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1} .... a_p) - f(a, ..., a)}{t}$$

$$a_{ij} = \left\langle A(e^{(p)}{}_j), e^{(q)}{}_i \right\rangle$$

$$\left|\frac{f_i(a+te_j)-f_i(a)}{t}-a_{ij}\right| = \left|\frac{f_i(a+te_j)-f_i(a)-ta_{ij}}{t}\right| = \left|\frac{\langle f(a+te_j)-f(a)-A(te_j),e_i\rangle}{t}\right| =$$

$$\le \frac{\|f(a+te_j)-f(a)-A(te_j)\| \bullet \|e_i\|}{\|te_{ij}\|} \underset{\text{ha } t\to 0}{\to 0}$$

□

A differenciálhatóság egy elégséges feltétele:
Ha a $D_j f_i -$k léteznek az a egy környezetében és az a-ban folytonosak, akkor az f differenciálható a-ban.

Bizonyítás:
Speciális esetben p=2 és q=1, $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(a+h)-f(a)-f'(a)(h) = f(a+h)-f(a)-\left(D_1f(a)h_1 + D_2f(a)h_2\right)$ $f'(a) = \left[D_1f(a)\ ,\ D_2f(a)\right]$

/ekkor $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta>0$,hogy $\|h\| < \delta \Rightarrow \|f(a+h)-f(a)-f'(a)(h)\| < \varepsilon\|h\|$ /

$f(a+h)-f(a) = f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2) =$

$= \underbrace{f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)}_{D_1f(a_1+t,a_2)h_1+D_2(a_1+h_1,a_2+t_2h_2)h_2} + f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)$ ha $c_1 \to a$ és $c_2 \to a$, $h \to 0$ akkor

$D_1f(c_1)h_1 + D_2(c_2)h_2$

□

Megjegyzés: Ha a differenciálhányados létezik, akkor az egyértelműen a Jacobi-mátrix.

Iránymenti derivált:
$f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $\|v\| = 1$ úgy választok irányt, hogy a normája legyen 1. Ha létezik $\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = f_v'(a)$, ezt a f függvény v irányban vett iránymenti deriváltjának nevezzük a-ban (q vektor).

Példa: A függvény nem feltétlenül differenciálható, ha minden irányban differenciálható.

$H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\ \text{vagy } x \le 0 \text{ vagy } y \le \sqrt{x}\right\} \subset \mathbb{R}^2$

$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a nullában differenciálható-e a függvény?

$\|x-y\| \ge \big\|\|x\|-\|y\|\big\|$

Ha differenciálható a-ban, akkor

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta>0$,$\|x-a\| < \delta \Rightarrow \|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\| \le \varepsilon\|x-a\|$ felhasználva az egyenlőtlenséget $\big\|\|f(x)-f(a)\|-\|f'(a)(x-a)\|\big\| \le \|f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)\| \le \varepsilon\|x-a\|$ ekkor

$\|f(x)-f(a)\| \le \|f'(a)(x-a)\| + \varepsilon\|x-a\| \le \underbrace{\left(\|f'(a)\|+\varepsilon\right)}_{\text{K konstans}}\|x-a\| = K \bullet \|x-a\|$

Nem folytonos.

Példa:
Az első síknegyed polárkoordinátázása:

$$f \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \times \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ , f(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \ , \text{arc tg}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\right)$$

3. előadás

Felhasználjuk, hogy $\forall A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ $\exists K > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^p$ $\|A(x)\|_q \le K\|x\|_p$ ahol $\|A(x)\|$ q-dimenziós norma és $\|x\|$ p-dimenziós norma.

Következmények:

1. Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz, mely lefedhető egy 0 középpontú körrel $\Rightarrow$ $A(H)\left(\subset \mathbb{R}^p\right)$ is korlátos halmaz, vagyis lefedhető egy 0 középpontú gömbbel.
Ha H része a $\overline{B}(0,L)$ $(\|x\| \le L)$ gömbnek, akkor $A(H) \subset \overline{B}(0,KL)$ $(\|Ax\| \le LK)$.

2. Ha (x_n) $\mathbb{R}^p$-beli $/\|x\| \to 0/$ nullsorozat, akkor (Ax_n) $\mathbb{R}^q$ -beli $/\|Ax_n\| \le K\|x_n\| \to 0/$ nullsorozat.

Tétel: a deriváltra vonatkozó átviteli elv

Ha $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $a \in \mathrm{int}\, D(f)$, $A \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^q)$ akkor a következő állítások egyenértékűek:

1. f differenciálható az a helyen és a deriváltja ott A-val egyenlő.

2. $\forall \mathbb{R}^p -$ beli korlátos (v_n) vektorsorozat és bármely pozitív tagú (t_n) nullsorozat esetében $\lim \frac{1}{t_n}\left[f(a + t_n v_n) - f(a) - A(t_n v_n)\right] = 0 \in \mathbb{R}^q$.

3. $\forall \mathbb{R}^p -$ beli korlátos (v_n) vektorsorozat és bármely pozitív tagú (t_n) nullsorozathoz $\exists (z_n) \in \mathbb{R}^q$ -beli nullsorozat, melyre $\forall n$ esetén $f(a + t_n v_n) = f(a) + A(t_n v_n) + t_n v_n =$
$= f(a) + t_n\left[A(v_n) + z_n\right]$

Bizonyítás:

$1 \Rightarrow 2$ (v_n) korlátos sorozat (t_n) pozitív tagú nullsorozat, $\varepsilon > 0$. Akkor $\forall h \in \dot{B}(0,\delta)$
$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\|f(a+h) - f(a) - A(h)\| = 0 \Rightarrow \exists \delta > 0$ (hibakorlát $\lim_{n\to\infty}(t_n v_n) = 0$ $\Rightarrow \exists N \in \mathbf{N}^+$ esetén $\|t_n v_n\| \le 0$)
$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\|f(a+h) - f(a) - A(h)\| < \frac{\varepsilon}{K}$, $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\|f(a+t_n v_n) - f(a) - A(t_n v_n)\| < \frac{\varepsilon}{K}$ olyan n-re, amelyekre $v_n \ne 0$.

$$\text{Ha } n \ge N \text{ akkor } \frac{1}{t_n}\|f(a+t_n v_n) - f(a) - A(t_n v_n)\| = \begin{cases} 0 \text{ ha } v_n = 0 \\ \|v_n\| \bullet \frac{1}{t_n\|v_n\|} \text{ ha } \|v_n\| \bullet \frac{\varepsilon}{K} \le K \bullet \frac{\varepsilon}{K} \end{cases}$$

$\underline{2 \Rightarrow 3}$ $z_n = \frac{1}{t_n}\left[f(a+t_n v_n) - f(a) - A(t_n v_n)\right]$

$\underline{3 \Rightarrow 1}$ Igazolni kell, hogy $\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|}\left[f(a+t_n v_n) - f(a) - A(t_n v_n)\right] = 0$. Ez indirekt úton bizonyítható. A bizonyítás során a határértékre vonatkozó átviteli elvet fogjuk alkalmazni. Létezik nullához tartó (h_n) sorozat, $h_n \neq 0$ melyre teljesül, hogy

$\forall n-re\ \ (a+h_n) \in D(f)$ ekkor $n \to \frac{1}{\|h_n\|}\left[f(a+h_n) - f(a) - A(h_n)\right]$ nem nullsorozat.

Alkalmazva a 3. állítást $t_n := \|h_n\|$, $v_n := \frac{1}{\|h_n\|}$ $\|v_n\| = 1 \Rightarrow (v_n)$ korlátos sorozat.

$\Rightarrow \mathbb{R}^q -$ beli (z_n) nullsorozat amelyre $\forall n\ \ f(a+t_n v_n) - f(a) - A(t_n v_n) = t_n z_n$

$\frac{1}{t_n}\left[f(a+h_n) - f(a) - A(h_n)\right] = z_n \Rightarrow 0$. Ellentmondás.

□

<u>Tétel:</u>
$h \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^r$ $g \in \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^q$ $a \in \operatorname{int} D(h)$ $b:=b(a) \in D(g)$, h differenciálható az a pontban, a g pedig a b pontban$\Rightarrow$
1. $a \in \operatorname{int} D(g \circ h)$
2. $g \circ h$ differenciálható az a pontban és $(g \circ h)'(a) = g'(b) \circ (h)'(a)$ / $\Rightarrow (g \circ h)'(a)$ mátrixa a másik két deriváltmátrix vagy Jakobi mátrix szorzata/

<u>Bizonyítás:</u>
Az előző bizonyítás $\underline{3 \Rightarrow 1}$ részét alkalmazzuk; az $f = g \circ h$ $A = g'(b) \circ (h)'(a)$ pozitív tagú (t_n) null sorozat, (v_n) korlátos $\mathbb{R}^p$-beli sorozatot h-ra alkalmazzuk az előző tételt.
$1 \Rightarrow 3$ állítását. Létezik (z_n^h) $\mathbb{R}^r -$ beli nullsorozat, melyre

$\forall n\ \ h(a+t_n v_n) = h(a) + t_n \left[\underbrace{h'(a)(v_n) + z_n^i}_{\text{korlátos sorozat}}\right]$, jelöljük v_n'

g-re alkalmazzuk az előbbi $1 \Rightarrow 3$ $\exists\ (z_n^q)$ $\mathbb{R}^q -$ beli nullsorozat, melyre v_n' $g(b+t_n v_n') =$
$= g(h(a)) + t_n\left[g'(b)(h'(a)(v_n) + z_n^q)\right] = g(h(a)) + t_n\left[g'(b) \circ (h'(a))(v_n) + g'(b)(z_n^h) + z_n^q\right]$ ahol $g'(b)(z_n^h) + z_n^q$ null sorozat, amivel fönn áll az azonosság. A bizonyítás során felhasználtuk, hogy lineáris leképezés nullsorozatot nullsorozatba képez le és ez lesz (z_n^f).

□

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ $a \in \operatorname{int}D(f)$ $\exists \lim_{t\to a} \frac{1}{t-a}\left[f(t) - f(a)\right]\left(\in \mathbb{R}^q\right)$ $\Leftrightarrow$ f differenciálható az a helyen.

Sőt:

$$\exists \lim_{t\to a} \frac{1}{t-a}\left[f(t)-f(a)\right] =: v \Leftrightarrow \lim_{t\to a} \frac{1}{t-a}\left[f(t)-f(a)-(t-a)v\right] = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to a} \frac{1}{|t-a|}\left[f(t)-f(a)-\underbrace{(t-a)v}_{A_v(t-a)}\right] = 0$$

$\Rightarrow$ f differenciálható az a helyen és ez $f'(a) = A_v$.

p=q=2 $\exists \lim_{t\to a} \frac{1}{t-a}\left[f(t)-f(a)\right]$ komplex hányados vagy komplex számok osztása

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $z \to zv$ $\Leftrightarrow$ ha f differenciálható az a helyen és $f'(a) = Av$ esetén

$$\begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 z_1 - v_2 z_2 \\ v_2 z_1 + v_1 z_2 \end{pmatrix}.$$

□

4. előadás

Példa a differenciálhatóság elégséges feltételéhez

Legyen f∈ $\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & \text{, ha } x = 0 \end{cases}$$

p=2

$$f(x;y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{, ha } (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{ha } (x,y)=0 \end{cases}$$

$$f(x,0) = x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$$

$$f(0,y) = y^2 \sin\left(\frac{1}{|y|}\right)$$

$$D_1 f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) = 0$$

A $\sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$ korlátos, így az alsó vagy felső korlátjával helyettesíthetem, ezzel egy becslést adok, x^2 pedig a nullához tartva tart a nullához.

$$D_2 f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(y,0)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} y^2 \sin\left(\frac{1}{|y|}\right) = 0$$

az előzőhöz hasonló meggondolás miatt.

Ha f'(0,0) létezik akkor $[D_1 f(0,0)\ ,\ D_2 f(0,0)] = [0,0]$ sorvektor Jakobi–mátrix

$$\frac{|f(x)-f(0)-A(x-0)|}{\|x\|} = \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|x\| \left| \sin\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \right|_{x\to 0} \quad \Rightarrow \text{ f'(0) null-leképezés(lineáris).}$$

Állítás :

A parciális derivált függvények a nullában nem folytonosak. Legyen $x>0$;

$$f(x,0) = x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

$$D_1 f(x,0) = 2x \bullet \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \bullet \frac{1}{x^2} \bullet (-1) = 2x \bullet \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right);$$

$\lim_{x\to 0^+} D_1 f(0,0)$ nem létezik $x_n := \dfrac{1}{\pi n}$ n=1 , 2 , 3....-re $D_1 f(x_n, 0) = -\cos(\pi n) = (-1)^{n+1}$

Tehát nincs határértéke.

...

Komplex változós függvények, leképezések

$\mathbf{C} \cong \mathbb{R}^2$, $x+y=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$, $x \times y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 - x_2y_2 \\ x_1y_2 + x_2y_1 \end{bmatrix}$

a szozásra nézve $e=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (\underline{e}_1)$, $i=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (\underline{e}_2)$ ezek lesznek a báziselemek, $i \times i = -e$.

Legyen f lineáris leképezés $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$

$$f(x) = \underbrace{f(e\times x)}_{C} = \underbrace{f(e)}_{C} \times x = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1x_1 - c_2x_2 \\ c_1x_2 + c_2x_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_1 \end{pmatrix}}_{C \text{ a } C\in C\text{-nek megfelelő mátrix}} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{A} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{21} \\ a_{11} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = -a_{21} \end{matrix} \text{ komplex leképezések } \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \\ c_2 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ alakúak.}$$

$f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ x+iy \in \mathbb{C}$

$f_1(x,y) := \mathrm{Re}(f(x+iy)) \quad f_2(x,y) := \mathrm{Im}(f(x+iy))$

$$f'(a) = \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)\|}{\|h\|} \begin{pmatrix} a = a_1 + ia_2 \\ h = h_1 + ih_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1(a_1+h_1, a_2+h_2) - f_1(a_1,a_2) + i(f_2(a_1+h_1, a_2+h_2) - f_2(a_1,a_2))}{h_1 + ih_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Re}(f'(a)) = D_1 \quad f_1(a) = D_2 f_2(a) \\ \\ \mathrm{Im}(f'(a)) = D_1 \quad f_2(a) = -D_2 f_1(a) \end{array}\right\} \text{Cauchy- Riemann- féle egyenletrendszer}$$

...

$f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható a-ban.

Speciális esetek:

a) $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ - derivált mátrixa egy p sorból álló egy oszlopú mátrix, amit sormátrixként írunk fel $\left[f_1'(a),\ f_2'(a), ...,f_p'(a) \right]$; ezt nevezzük sebességvektornak.

Hogy néz ki az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ -ba ható lineáris leképezés?

$\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^q$ $l(t)$=l $(t \bullet 1) =$ $t \bullet \ell(1)$ ($l(1)$=v $\in \mathbb{R}^q$)

b)

$f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$; $f'(a) \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés mátrixa $\left[D_1 f(a),\ D_2 f(a), ...,D_p f(a) \right]$,

$\ell : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés $\ell(v) = \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{p} v_i w_i$ $v, w \in \mathbb{R}^p$ $\ell \Leftrightarrow w$

$\ell(e_i) = \langle e_i, w \rangle = w_{ip}$ i=1,2,....,p $\ell(v) = \ell\left(\sum_{i=1}^{p} (v_i e_i) \right) = \sum_{i=1}^{p} v_i \underbrace{\ell(e_i)}_{w_i} = \langle v, w \rangle$

A Jacobi-mátrixot nevezzük ekkor gradiensnek:

$f'(a)(v) = \langle v,\ \mathrm{grad}(f)(a) \rangle$ ahol $\mathrm{grad}(f)(a) \Rightarrow \left[D_1 f(a),\ D_2 f(a), ...,D_p f(a) \right] \in \mathbb{R}^p$

$f'(a)(e_i) = D_i f(a)$ /ez az f függvény i-edik parciális deriváltja /

Az összetett függvény deriválási szabályainak következményei:

1. következmény

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható függvény iránymenti differenciálhányadosa

$f_v'(a) = f'(a)(v)$.

$f_v(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} = (f \circ g)'(0)$, ahol g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, g(t)=a+tv

$(f \circ g)'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ g)(t) - (f \circ g)(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(g(t)) - f(g(0))}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$

Ha f differenciálható a-ban, akkor $f \circ g$ differenciálható a nullában és

$(f \circ g)(0) =$ $f'(\underbrace{g(0)}_{a}) \circ g'(0) = f'(a)(v)$ $/ = f_v'(a) /$

2. következmény

Tegyük fel, hogy f^{-1} létezik és f differenciálható $f^{-1} : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^r$ differenciálható és

$(f^{-1})'(x) = \left(f'\left(f^{-1}(x) \right) \right)^{-1}$ $x \in R(f) = D(f^{-1})$ $f \circ f^{-1} = id_{R(f)}$

$f \circ f^{-1} = id_{D(f)}$ láncszabály a deriválásra

$$f'(\underbrace{f^{-1}(b)}_{a}) \circ (f^{-1})'(b) = id_{R(f)} \quad (f^{-1})'(\underbrace{f(a)}_{b}) \circ f'(a) = id_{D(f)} \quad (f^{-1})'(b) = \left(f'\left(f^{-1}(b)\right)\right)^{-1}$$

5. előadás

Példa

Legyen $f \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \cos(x_2) \\ x_1 \sin(x_2) \end{bmatrix}$

Legyen $g \in \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $g\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y_1^2 + y_2^2 \\ 2y_1 y_2 \end{bmatrix}$

$D_1 f_1(x_1, x_2) = \cos(x_2)$

$D_2 f_2(x_1, x_2) = -x_1 \sin(x_2)$

$D_1 f_1(x_1, x_2) = \sin(x_2)$

$D_2 f_1(x_1, x_2) = x_1 \cos(x_2)$

$D_1 f_1 = \cos \circ pr_2$ (2. koodináta projekciója)

$D_2 f_1 = -pr_1 \circ \sin \circ pr_2$

$$f'(x) = f'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \cos(x_2) & -x_1 \sin(x_2) \\ \sin(x_2) & x_1 \cos(x_2) \end{bmatrix}$$

$$(g \circ f)(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1^2 \sin(2x_2) \end{bmatrix}$$

$$g'(y) = g'(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 2y_1 & 2y_2 \\ 2y_2 & 2y_1 \end{bmatrix}$$

$$(g \circ f)'(x_1, x_2) = g'(f(x_1, x_2)) \circ f'(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 0 \\ 2x_1 \sin(2x_2) & 2x_1^2 \cos(2x_2) \end{bmatrix}$$

Középérték-egyenlőtlenségek

$$f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad x, y \in \mathbb{R}^p \quad f'(c) = \begin{bmatrix} D_1 f(c) \\ D_2 f(c) \\ . \\ . \\ . \\ D_n f(c) \end{bmatrix}$$

Állítás:
Ha f folytonos az $\left[x,y\right]$-on és differenciálható az

$\left]x,y\right[-\text{on} \Rightarrow \exists\, c \in \left]x,y\right[$,hogy f(y)-f(x)=$\left\langle f'(c), y-x \right\rangle \Rightarrow \left|f(y)-f(x)\right| = \left|\left\langle \underbrace{f'(c)}_{grad(f)(c)}, y-x \right\rangle\right| \le$

$\le \left\|f'(c)\right\| \bullet \left\|y-x\right\| \le (\sup\left\|f'(c)\right\|) \bullet \left\|y-x\right\|$

Bizonyítás:
$h:\left[0,1\right] \to \mathbb{R}$, h(t):=f(x+t(y-x)) ; h folytonos a $\left[0,1\right]$ intervallumon differenciálható a $\left]0,1\right[-\text{en}$
g:$\left[0,1\right] \to \mathbb{R}^p$, g(t)=x+t(y-x)
$(g\left]0,1\right[) = \left]x,y\right[$ és ezen az f differenciálható, $g'(t)$=y-x
h=$f \circ g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; R(g)=$\left[x,y\right]$
$h'(t)=f'(g(t)) \bullet g'(t) = \left\langle f'(x, t(y-x)), y-x \right\rangle$
Lagrange középérték- tétel szerint $h(1)-h(0) = h'(\tau)$ ahol $\tau \in \left]0,1\right[$
$\Rightarrow$ f(y)-f(x)=$\left\langle f'(c), y-x \right\rangle$, ahol c:=g(τ) = x+τ(y-x) $\in \left]x,y\right[$

□

Állítás:
$f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ foltonos az $\left[x,y\right]$-on és differenciálható az $\left]x,y\right[-\text{on}$, akkor $\exists\, c \in \left]x,y\right[$, hogy
$\left\|f(y)-f(x)\right\| \le \left\|f'(c) \bullet (y-x)\right\| \le \left\|f'(c)\right\| \bullet \left\|y-x\right\| \le (\sup\left\|f'(z)\right\|_{z\in]x;y[}) \bullet \left\|y-x\right\|$

Bizonyítás:
Legyen $\mathbb{R}^p-\text{ben}$ $e_1, e_2, \ldots, e_p$ bázis
Segédtétel: Ha $v \in \mathbb{R}^p$ és $v \ne 0$, akkor van olyan $\ell: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineáris leképezés, melyre
$\ell(v) = \left\|v\right\|$ és $\left\|\ell\right\| = 1$

$$\ell(x) = \left\langle x, \frac{v}{\left\|v\right\|} \right\rangle$$

$$\left\|\ell\right\| = \left(\sum_{i=1}^{p} \ell(e_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{v}{\left\|v\right\|}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left\|v\right\|}\sum_{i=1}^{p}\left(v_i^2\right) = \frac{\left\|v\right\|}{\left\|v\right\|} = 1$$

$$\ell(v) = \left\langle v, \frac{v}{\left\|v\right\|} \right\rangle = \frac{1}{\left\|v\right\|}\left\langle v, v\right\rangle = \frac{1}{\left\|v\right\|} \bullet \left\|v\right\|^2 = \left\|v\right\|$$

Definiáljuk:
h:$\ell \circ f \circ g$,ahol l:$\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ olyan lineáris leképezés $\ell(f(y)-f(x)) = 1$ és $\left\|\ell\right\| = 1$,
$h:\left[0,1\right] \to \mathbb{R}$, h(1)-h(0)=$h'(\tau)$, $\tau \in \left]0,1\right[$
$h(1) = \ell(f(g(1))) = \ell(f(y)) \quad h(0) = \ell(f(g(0))) = \ell(f(x))$

$$\ell(f(y))-\ell(f(x))=h'(\tau)=\underbrace{\ell'(f(g(\tau)))\bullet f'(g(\tau))\bullet g'(\tau)}_{\text{láncszabály}}=\ell(\underbrace{f'}_{\substack{\text{lineáris}\\ \text{függvény}\\ \text{deriváltja}\\ \text{önmaga}}}(c))(y-x)$$ ez eddig pontos érték.

$$\|f(y)-f(x)\|=\ell(f(y))-\ell(f(x))=\ell(f'(c)(y-x))\le\left|\ell\underbrace{(f'(c))(y-x)}_{\in\mathbb{R}^q}\right|\le$$

$$\le\|\ell\|\bullet\|f'(c)(y-x)\|=\|f'(c)(y-x)\|\le\|f'(c)\|\bullet\|y-x\|.$$

□

Következmény:
Ha az $f\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ függvény differenciálható egy H összefüggő halmazon és $f'(x)=0$ ha $x\in H$, akkor f a H-n konstans.
Összefüggő H halmaz euklideszi térben: bármely két pont között törött vonallal összeköthető;
konvex: bármely két pontja egy szakasszal összeköthető;
csillagszerű: létezik csillagközéppont, amelyből kiindulva bármely pont egy szakasszal elérhető.

Bizonyítás:
$x,y\in H$;kellene $f(x)=f(y)$.

$[x,a_1]\cup[a_1,a_2]\cup[a_2,a_3]\cup....\cup[a_n,y]$

$f(y)-f(x)=\left(f(y)-f(a_n)\right)+\left(f(a_n)-f(a_{n-1})\right)+....+\left(f(a_1)-f(x)\right)$

$\|f(a_k)-f(a_{k-1})\|\le\|f'(c_k)(a_k-a_{k-1})\|=\|0\|=0$, $c_k\in\left]a_{k-1};a_k\right[$

mert $f'(c_k)=0$ (a tétel feltétele volt).

□

...

Másodrendű deriváltak:
$f\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ függvényre értelmezzük.
(Megjegyzés: $f\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$; $f'(x)\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ lineáris leképezés ; $f'\in\mathbb{R}^p\to L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^q)$)
Ha q=1, $L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^p$ $f'\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$, $f'(x)(v)=\langle f'(x),v\rangle$

$$f'(x)=\begin{bmatrix}D_1f(x)\\ .\\ .\\ D_pf(x)\end{bmatrix}$$

A derivált leképezés, i. koordinátafüggvénye D_if . Az $A=(f')'(x)\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ lineáris leképezés, amelynek a mátrixban az i-edik sora j-edik eleme $(D_jD_if)(x)$ $1\le i;j\le p\to$

Feladat

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq 0\\ 0 & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad , f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$$\underset{x\neq 0}{D_2 f(x,0)}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{y}=x\Rightarrow D_2 f(x,0)=x$$

$$D_2 f(0,0)=\lim\frac{f(0,y)-f(x,0)}{y}=\frac{0}{y}=0\quad\Rightarrow D_2 f(x,0)=x\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$$D_1(D_2 f)(0,0)=\lim\frac{D_2 f(x,0)-D_2 f(0,0)}{x}=1$$

$D_1 f(0,y)=-y_{y\neq 0}$ mint az előbb

$D_2(D_1 f)(0,0)=-1$

Tétel: $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $\left(\text{lehetne } \mathbb{R}^p\to\mathbb{R} \text{ is}\right)$ Young-tétel.

Ha a $D_i D_j f$ parciális deriváltak léteznek az (a_1, a_2) $\in\mathbb{R}^2$ egy környezetében és az a=(a_1, a_2)-ben folytonosak, akkor $D_i D_j f(a)=D_j D_i f(a)$.

6. előadás

Schwartz tétel (a Young-tételnél általánosabb tétel)

Legyen f: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ $a\in\operatorname{int} D(f)$, tegyük fel, hogy $\exists r>0$, hogy $\forall(x_1,x_2)\in B(a_1,r)\times B(a_2,r)$ $\exists D_2D_1f(x_1,x_2)$, $\forall x_1\in B(a_1,r)$ $\exists D_2 f(x_1,a_2)$, továbbá tegyük fel, hogy D_2D_1f folytonos az a pontban ekkor $\exists D_1D_2f(a)=D_2D_1f(a)$ =A.

Bizonyítás:
Állítás:

$$\varepsilon>0\ \exists\delta>0{:}\forall h\in\dot{B}(0,\delta)\ ,\ \left|\frac{D_2 f(a_1+h,a_2)-D_2 f(a_1,a_2)}{h}-A\right|\leq\varepsilon .$$

Ehhez elég, ha $\exists\delta\in(0,r)$,hogy $\forall h\in\dot{B}(0,\delta)$ $\forall k\in\dot{B}(0,\delta)$

$$\left|\frac{1}{h}\left\{\frac{f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1+h,a_2)}{h}-\frac{f(a_1,a_2+h)-f(a_1,a_2)}{h}\right\}-A\right|\leq\varepsilon$$

Ahhoz, hogy ilyen δ létezését bizonyíthassuk, át kell alakítanunk a kifejezést úgy, hogy alkalmas h-t bevezetünk a nevezőben, k-t pedig kiemeljük a nevezőből, így a következő átalakításhoz jutunk:

$$\left|\left\{\underbrace{\frac{1}{k}\left[f(a_1+h,a_2+k)-f(a_1+h,a_2)\right]}_{g_k(h)\text{ függvénynek nevezzük el}}-\frac{1}{u}\left[f(a_1,a_2+k)-f(a_1,a_2)\right]\right\}-A\right|=\text{ Lagrange középérték-}$$

tétel segítségével. Így a $g_k(h)$ függvényhez tartozó differenciálhányadost fedezhetjük fel amely parciálisan deriválható a négyzet pontjaiban.

$g_k'(h) = D_1 f(a_1 + h, a_2 + k) - D_1 f(a_1 + h, a_2)$ a Lagrange középérték tételt felhasználva a $g_k(h)$ a következő átalakítást kapjuk: $s_{h,k} \in [0,1]$

$$= \left| \left\{ \frac{1}{k} \left[D_1 f(a_1 + s_{k;h} h, a_2 + k) - D_1 f(a_1 + s_{k;h} h, a_2) \right] \right\} - A \right| =$$

Így egy újabb különbségi hányadoshoz jutunk melyre használhatjuk a középérték tételt
$= \left| D_2 D_1 f(a_1 + s_{k,h} h, a_2 + t_{k,h} k) - A \right| \le \varepsilon$, ha δ- t úgy választjuk meg hogy
$\forall (x_1, x_2) \in B_\infty((a_1, a_2), \delta)$ melyet végtelen metrikán értelmeztünk.
Ha elég kicsi h, k –t választottunk, akkor ennek folytonossága miatt a folytonosság továbbra is fennáll. A $D_2 D_1 f$ függvény a- beli folytonossága miatt mindez továbbra is fenn áll.

□

Lokális Taylor-formulák
Segédtétel:
$S \in \mathbb{R}^{p\times q}$ szimmetrikus mátrix $S = (s_{ij})^p_{i;j=1}$ akkor a $\varphi \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény, amely u

$\forall x \in \mathbb{R}^p$ $\varphi(x) := x^T \bullet S \bullet x = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} s_{ij} x_i x_j$, differenciálható, és $\forall h \in \mathbb{R}^p -$re

$\nabla \varphi(h) = 2Sh$ (∇ a gradiens vektort jelöli)

Bizonyítás:
φ polinomfüggvény $\Rightarrow k = 1, 2........, p$ és $\forall x \in \mathbb{R}^p$ v $\exists D_k \varphi(x)$ és $D_k \varphi(x)$ is polinomfüggvény

tehát folytonos. Igazolni, kell, hogy $k = 1, 2........, p$ $D_k \varphi(h) = (2Sh)_k = 2\sum_{j=1}^{p} s_{kj} h_j$

$$D_k \varphi(h) = \sum_{i \ne k} s_{ik} h_i + \sum_{j \ne k} s_{kj} h_j + 2 s_{kk} h_k = 2\sum_{j=1}^{p} s_{kj} h_j$$

□

Tétel: Másodrendű lokális Taylor formula
$f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $a \in \operatorname{int} D(f)$, tegyük fel, hogy az f az a pontban kétszer differenciálható [és az $f'(a)$ mátrix szimmetrikus] $\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|^2} \left[f(a+h) - f(a) - f'(a)h - \frac{1}{2} h^t f''(a) h \right] = 0$

Bizonyítás:

$\varepsilon > 0$, f kétszer differenciálható az a pontban $\lim_{h\to 0} \frac{\|\nabla f(a+h) - \nabla f(a) - f''(a)\|}{\|h\|} = 0$

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ $\forall h \in \dot{B}(0;\delta)$ $\frac{1}{\|h\|} \|\nabla f(a+h) - \nabla f(a) - f''(a)h\| < \varepsilon$.

$g(h) := f(a+h) - f'(a)h - \frac{1}{2} h^t f''(a) h \Rightarrow \frac{1}{\|h\|^2} \left| f(a+h) - f(a) - f'(a)h - \frac{1}{2} h^t f''(a) h \right| =$

$= \frac{1}{\|h\|^2}|g(h)-g(0)| = \frac{1}{\|h\|}|g'(Sh)h| = \frac{|\langle \nabla g(Sh), h\rangle|}{\|h\|} \leq$ $(\nabla g'(h)_{s\in(0;1)} = \nabla f(a+h) - \nabla f(a) - f''(a)h$

Cauchy- Schwartz egyenlőséget használunk fel)

$\leq \frac{1}{\|h\|}\|\nabla g(Sh)\| = \frac{1}{\|h\|}\|\nabla f(a+Sh) - \nabla f(a) - f''(a)Sh\| =$

$= \frac{S}{\|Sh\|}\|\nabla f(a+sh) - \nabla f(a) - f''(a)sh\| < S\varepsilon < \varepsilon$

□

Lokális szélsőérték:

Definíció:

$f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R},\ a \in D(f)$, f-nek az a helyen vett lokális minimuma, illetve maximuma van, ha

$\exists r>0\ \forall x \in D(f) \cap B(a;r)\ \ f(x)\text{-}f(a)\begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$

Lokális szélsőérték elsőrendű szükséges feltétele:

Tétel:

$f:\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}\ \ a \in \operatorname{int} D(f)$ f-nek lokális szélsőértéke van az a helyen és ott még differenciálható is, akkor a deriváltja szükségképpen nulla. / $f'(a)=0$ /

Bizonyítás:

$0 \neq h \in \mathbb{R}^p\ \ \|h\| = 1\ \ \varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \to f(a+th)$ esetén $0 \in \operatorname{int} D(\varphi)$, hiszen

$B(a,\delta) \subset D(\varphi) \Rightarrow B(0,\delta) \subset D(\varphi)$. $|t| < \delta \quad \Rightarrow \|t\| < \delta \quad \varphi(t) - \varphi(0) = f(a+h) - f(a)\begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$

$\forall t \in (-r;r)$

Mivel φ kétszer differenciálható függvény kompozíciója $t \to a+th$ helyen differenciálható a $h \Rightarrow 0 = \varphi'(a) = f'(a)h = \langle \nabla f(a), h\rangle = 0 \Rightarrow f'(a) = 0 \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$:a szélsőérték deriváltja nulla. Vagyis a homogenitásból következik, hogy minden vektorral vett szorzata nulla.

□

Tétel: A lokális szélsőérték másodrendű szükséges feltétele

$f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} D(f)$ f-nek az a helyen lokális $\begin{cases} \text{minimum} \\ \text{maximum} \end{cases}$ van, ha

$\exists f''(a) \Rightarrow (f'(a) = 0$ és $)\ \forall h \in \mathbb{R}^p\ \ h^t f''(a)h\begin{cases} \geq 0 \\ \leq 0 \end{cases}$ attól függően minimumról vagy maximumról van- e szó.

7.előadás

Többváltozós valós függvények szélsőértékei:

$f \in \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$

az értelmezési tartomány egy K_0 pontjában f-nek lokális minimuma (maximuma) van, ha $\exists$ $K(x_0)$, hogy $\forall$ $x \in K(x_0)$-ra, $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$)

Tegyük fel, hogy $\exists$ lokális szélsőérték az x_0 pontban, akkor bármely v irány mentén

$$\left.\begin{array}{llll} & f'_v(x_0) = \lim_{t \to 0} & \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} & \\ f'_v(x_0) = 0 & t > 0 & \text{esetén} & \geq 0 \\ & t < 0 & \text{esetén} & \leq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0$$

Példák

1.

$f \in \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ $f(x_1, x_2, \ldots, x_p) = (\|x\|^2 - 1)^2$

A 0-ban lokális maximuma lesz az egész gömbfelület globális minimuma lesz. Ám az x=0 pont csupán lokális maximum lesz, nem globális maximum.

$D_i f(x) = 2(\|x\|^2 - 1) \bullet 2x_i = 4x_i(\|x\|^2 - 1) \Rightarrow$ ekkor vagy minden $x_i = 0, vagy \ \|x\| = 1$

2.

$f \in \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$

$f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ nyeregfelület.

Ha $x_2 = 0$ akkor $f(x_1, 0) = x_1^2 > 0,$ ha $x_1 \neq 0$.

Ha az x_1=0 akkor $f(0, x_2) = -x_2^2 < 0,$ ha $x_2 \neq 0$. Ekkor nem elegendő a szélsőérték létezéséhez az, hogy a derivált 0, mert esetünkben a derivált a 0-ban a 0 értéket veszi fel, de itt a függvénynek nincsen szélsőértéke.

3.

$f \in \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$

$f(x_1, x_2) = x_1^4 - x_2^4$ (ez a feladat arra példa, hogy esetenként a második derivált sem ad szélső értéket)

Másodrendű infinitezimális Taylor-formula

Állítás:

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}$ kétszer differenciálható az a pontban, akkor

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{a,2}(f)(x)}{\|x - a\|^2} = 0$$

$$T_{a,2}(f)(x) = f(a) + \langle f'(a), x - a \rangle + \frac{1}{2} \langle f''(a)(x - a), (x - a) \rangle \quad , (x \in \mathbf{R}^p)$$

Bizonyítás:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta>0$, hogy $\|x\text{-}a\| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - T_{a,2}(f)(x)\right| \le \varepsilon\|x-a\|^2$

ε rögzítem és legyen δ >0 olyan, hogy $\|x - a\| < \delta$ esetén

$\|f'(x) - f'(a) - f''(a)(x - a)\| \le \varepsilon\,\|x - a\|$. Ilyen δ van, mert $(f')'(a) = f''(a)$ létezik.(Ha nem lenne kétszer differenciálható, akkor ez a lépés nem működne.)

Megmutatjuk, hogy ez a δ jó a bizonyításhoz, a bizonyítás menetében pedig középérték tételt használunk.

Legyen $g := f - T_{a,2}(f)$. Mivel itt kicsi a különbség, ezt szeretnénk felhasználni és még egy tényt $(T_{a,2}(f))' = T_{a,1}(f')$.

Legyen $\|x - a\| < \delta$ akkor van olyan $c \in (a, x)$, hogy $g(x) - g(a) = \langle g'(c), x - a\rangle$ (ez az a középérték-tétel, amelyet a bizonyításhoz használunk).

$\left|f(x) - T_{a,2}(f)(x)\right| = |g(x) - g(a)| = |\ \langle g'(c), x - a\rangle\ | \le$ (Cauchy-Bunyakovszki egyenlőtlenség)

$\le \|g'(c)\| \bullet \|x - a\| = \|f'(c) - (T_{a,2}(f)'(c))\| \bullet \|x - a\| =$

$= \|f'(c) - (T_{a,1}(f')(c)\| \bullet \|x - a\| = \|f'(c) - f'(a)\text{-}f''(a)(x - a)\| \bullet \|x - a\|$. Most már felhasználhatjuk a becslésünket $\le \varepsilon\,\|c - a\| \bullet \|x - a\| \le \varepsilon \bullet \|x - a\|^2$ ugyanis $\|c - a\| \le \|x - a\|$ (mert belső pont).

Lemma: $(T_{a,2}(f))' = T_{a,1}(f')$.

Lemma bizonyítása*:* $T_{a,2}(f)(x) = f(a) + \langle f'(a), x - a\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(a)(x - a), (x - a)\rangle$

$= f(a) - \langle f'(a), x - a\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(a)a, a\rangle + \langle f'(a), x\rangle - \langle f''(a), x\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(a)x, x\rangle$,

Tagonként deriválom:

$(T_{a,2}(f))'(x) = f'(a) - f''(a)a + f''(a)x = T_{a,1}(f')(x)$

(Mindenhol kihasználjuk hogy lineáris leképezésről beszélünk.)

Felhasználtunk még*:*

1.Ha f∈ $\mathbf{R}^\mathbf{p} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \langle a, x\rangle\quad \forall x \in \mathbf{R}^\mathbf{p}$,akkor $f'_v(x) = \langle a, v\rangle$ =f(v)

2..Ha f∈ $\mathbf{R}^\mathbf{p} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \langle Ax, x\rangle\quad A^t = A$

akkor $f'(x) \in \mathbf{R}^\mathbf{p} \to \mathbf{R}$, $f'(x)(v) = 2\,\langle Ax, v\rangle = \langle 2Ax, v\rangle$.

□

Feladat

Példa: f: $\mathbf{R}^\mathbf{p} \to \mathbf{R}$ ható függvény $f(x) = \left(\|x\|^2 - 1\right)^2$

$D_i f(x) = 4x_i\left(\|x\|^2 - 1\right)$ ha $1 \le x \le p$; $x \in \mathbf{R}^\mathbf{p}$. Innen következik, hogy f ’ az x pontban nulla, ha x=0 vagy ha $\|x\| = 1$

$D_j D_i f(x) = 8x_i x_j$ ha $i \ne j$ $D_i D_i f(x) = 4\left(\|x\|^2 - 1\right) + 8x_i^2 \Rightarrow$

$\langle f''(a)(x - a), x - a\rangle = 4(\|a\|^2 - 1) \bullet \|x - a\|^2 + 8(\langle a, x - a\rangle^2$

$T_{a,2}(f)(x) = f(a) + \langle f'(a), x - a\rangle + \frac{1}{2}\langle f''(a)(x - a), x - a\rangle =$

$= (\|a\|^2 - 1)^2 + 4(\|a\|^2 - 1)\ \langle a, x-a \rangle\ + 2(\|a\|^2 - 1)\|x-a\|^2 + 4(\ \langle a, x-a \rangle\ ^2$

Ha a=0 akkor

$T_{a,2}(f)(x) = 1 - \|x\|^2$ $(< 1 \text{ ha } x \neq 0)$ kiderül, hogy lokális szélsőértéke van.

ha $\|a\| = 1$, $T_{a,2}(f)(x) = 4(\ \langle a, x-a \rangle\ )^2$.

$f(x) - T_{a,2}(f)(x) = \left(\|x\|^2 - 1\right)^2 - (2(\ \langle a, x-a \rangle\ )^2 = (\ \langle x, x \rangle\ -\ \langle a, a \rangle\ )^2 - (2(\ \langle a, x-a \rangle\ )^2 =$

$(\ \langle x+a, x-a \rangle\ + 2\ \langle a, x-a \rangle\ ) = \ \langle x+3a, x-a \rangle$

$\langle x-a, x-a \rangle\ =\ \langle x+3a, x-a \rangle\ \bullet \|x-a\|^2$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{a,2}(f)(x)}{\|x-a\|^2} = \lim_{x \to a}\ \langle x+3a, x-a \rangle\ = 0$$

Feladat:

Számítsa ki a parciális deriváltakat és a vegyes deriváltakat, majd írja fel a Taylor formulát a következő függvényre: f∈ **R**^{p}→**R**, $f(x) = e^{-\|x\|^2}$.

8. előadás

Az $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lokális szélsőértékének létezésére vonatkozó szükséges illetve elégséges feltételek,

Tegyük fel, hogy f az a-ban kétszer differenciálható:

Szükséges feltétel:
Ha az f-nek az a-ban lokális minimuma van, illetve maximuma(vagyis lokális szélsőértéke van), akkor az $f'(a) = 0$ és az $f''(a)$ pozitív, (vagy negatív)akkor $\langle Av, v \rangle \geq 0$ ($\langle Av, v \rangle \leq 0$ ha negatív) $\forall v \in \mathbb{R}^p$.

Elégséges feltétel:
Ha az $f'(a) = 0$ és $f''(a)$ pozitív definit (negatív definit) akkor f-nek az a-ban szigorú lokális minimuma(maximuma) van.

A szimmetrikus mátrix pozitív definit, ha $\langle Av, v \rangle = 0$, ha $\forall v \in \mathbb{R}^p$, $v \neq 0$ a Wierstass-tétel szerint.

Bizonyítás: $\varphi(x) = \dfrac{f(x) - T_{a,2}f(x)}{\|x-a\|}$, $x \in D(f)/\{a\}$ $\lim_{x \to a}\varphi(x) = 0$

Szükséges feltétel bizonyítása:
Tegyük fel, hogy a-ban lokális minimum van. Ekkor $f'(a) = 0$ és van olyan $\delta > 0$, hogy

$0 < \|x-a\| < \delta - ra$ $\quad 0 \leq f(x) - f(a) = \varphi(x)\|x-a\|^2 + \frac{1}{2}\langle f''(a)(x-a), (x-a) \rangle$. Legyen $v \in \mathbb{R}^p$ és $\|v\| = 1$ válasszunk olyan $0 < |t| < \delta$ melyre $x = a + t \bullet v$ ekkor

$0 \le \varphi(a+t\bullet v)|t|^2 + \frac{t^2}{2}\langle f''(a)v,v\rangle \quad \forall \|v\|=1$ és $0<|t|<\delta \Rightarrow 0 \le \varphi(a+t\bullet v)+\frac{1}{2}\langle f''(a)v,v\rangle$

Azáltal növelem a kifejezés értékét, hogy a t helyére 1-et írok be.

$\lim_{t\to 0}\varphi(a+t\bullet v)=\lim_{x\to a}\varphi(x)$ mert $0\le\langle f''(a)v,v\rangle \quad \forall v\in\mathbb{R}^p$.

□

<u>Elégséges feltétel bizonyítása:</u>

Tegyük fel, hogy $f'(a)=0$ és $v\neq 0$ esetén $\langle f''(a)v,v\rangle>0$ jelölje m>0 a $\min_{\|v\|=1}\langle f''(a)v,v\rangle$ számot.

Ekkor

$$f(x)-f(a)=\varphi(x)\|x-a\|^2+\frac{1}{2}\langle f''(a)(x-a),(x-a)\rangle \ge \varphi(x)\|x-a\|^2+\frac{m}{2}\langle f''(a)(x-a),(x-a)\rangle=\left(\varphi(x)+\frac{m}{2}\right)\|x-a\|^2$$

$\Rightarrow$ $\delta>0$ olyan, hogy $0<\|x-a\|<\delta$, akkor $|\varphi(x)|<\frac{m}{2}$ $\Rightarrow$ f(x)>f(a) azaz f-nek a-ban szigorúan lokális minimuma van.

<u>Példák:</u>

Határozza meg a következő függvény szélsőértékeit, ha $f(-\pi;\pi)\times(-\pi;\pi)\to$ **R,**

$f(x_1,x_2)=\sin(x_1)\bullet\sin(x_2)$

$D_1f(x_1,x_2)=\cos(x_1)\bullet\sin(x_2)=0 \quad x_1=0$ jó lesz mert ekkor vagy az egyik vagy a másik lesz 0

$D_2f(x_1,x_2)=\sin(x_1)\bullet\cos(x_2)=0 \quad x_2=0$

$D_1D_1f(x_1,x_2)=-\sin(x_1)\bullet\sin(x_2)$

$D_2D_1f(x_1,x_2)=\cos(x_1)\bullet\cos(x_2)$

$D_1D_2f(x_1,x_2)=\cos(x_1)\bullet\cos(x_2)$

$D_2D_2f(x_1,x_2)=-\sin(x_1)\bullet\sin(x_2)$

x_1	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
x_2	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$

1. ha $x_1=0$,x_2=0 $\Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

2. ha $x_1=\frac{\pi}{2}$,$x_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

3. ha $x_1=-\frac{\pi}{2}$,$x_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

4. ha $x_1=-\frac{\pi}{2}$,$x_2=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}_{\text{maximum lesz}}$

5. ha $x_1=\frac{\pi}{2}$,$x_2=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ezek az $f''(a)$

1. eset $\langle f''(a)v, v \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2v_1v_2$ →indefinit, vagyis nincsen szélsőérték ez a szorzat pedig lehet negatív is attól függően, függően, hogy milyen v_1 , v_2 -öt használok

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

2. eset

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$$

$\left\langle \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -v_1^2 - v_2^2$ ez szélsőérték garantál mivel negatív definit »szigorúan lokális maximum f(a)=1

3. eset

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = v_1^2 + v_2^2$ ez pozitív definit » szigorúan lokális maximum f(a)=-1

Példák:

$f : (-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi) \to \mathbf{R}$ $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) \bullet \sin(x_2)$

$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ negatív definit

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ indefinit

$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pozitív definit

$\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ indefinit

Feladat

Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 1)^2$.

$D_1 f(x_1, x_2) = 2x_1 \bullet 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$

$D_2 f(x_1, x_2) = 2x_2 \bullet 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0$

$a = (0,0)$ $a_1^2 + a_2^2 = 1$ a feltételt kielégíti az $a = (a_1, a_2)$ pontok ezek a körvonal pontjai.

$D_1 D_1 f(x_1, x_2) = 4(x_1^2 + x_2^2 - 1) + 4x_1 \bullet 2x_1 = 4x_1^2 + 8x_1^2 + 4x_2^2 - 4 = 12x_1^2 + 4x_2^2 - 4$

$D_2 D_1 f(x_1, x_2) = 8x_1x_2$

$D_1 D_2 f(x_1, x_2) = 8x_1x_2$

$D_2D_2f(x_1,x_2)=4(x_1^2+x_2^2-1)+4x_2\bullet 2x_2=12x_2^2+4x_1^2-4$

$f''(a)$, ha a=(0,0) $\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$

$\left\langle \begin{pmatrix} -4v_1 \\ -4v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\rangle = -4v_1^2-4v_2^2=-4(v_1^2+v_2^2)$ negatív definit szigorúan lokális maximum

$\Rightarrow f(0,0)=1$

$f''(a)$ ha $a=(a_1,a_2)$ $f''(a)=\begin{pmatrix} 8a_1^2 & 8a_1a_2 \\ 8a_1a_2 & 8a_2^2 \end{pmatrix}$

$a_1^2+a_2^2=1$

$\begin{pmatrix} 8a_1^2 & 8a_1a_2 \\ 8a_1a_2 & 8a_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8a_1^2v_1+8a_1a_2v_2 \\ 8a_1a_2v_1+8a_2^2v_2 \end{pmatrix}$, majd megszorozzuk skalárisan $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 8a_1^2v_1+8a_1a_2v_2 \\ 8a_1a_2v_1+8a_2^2v_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=8a_1^2v_1^2+8a_1a_2v_1v_2+8a_1a_2v_1v_2+8a_2^2v_2^2=8(a_1^2v_1^2+2a_1a_2v_1v_2+a_2^2v_2^2)=$

$=8(a_1v_1+a_2v_2)^2\geq 0$ lehet lokális szélső értéke, de nem tudjuk, hogy van. De azt tudjuk, hogy ezen a körvonalon abszolút minimuma van.

Feladat

Határozza meg a következő függvény szélsőértékeit!

$f(x_1;x_2)=x_1^4-x_2^4-(x_1+x_2)^2$

9. előadás

Emlékeztető lineáris algebrából:

Legyen A:$\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$ lineáris leképezés

1/a Ha A injektív, de nem ráképezés, akkor p<q és r(A)=p

1/b Ha A szürjektív, de nem injektív, akkor p>q és r(A)=q

1/c Ha A bijektív, akkor p=q és r(A)=p

Legyen A rangja maximális, azaz r(A)=min{p,q}; ekkor:

2/a Ha p<q, akkor A injektív, de nem szürjektív.

2/b Ha p>q, akkor A szürjektív, de nem injektív.

2/c Ha p=q, akkor A bijektív.

...

Tekintsük f$\in\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$, tegyük fel, hogy C^1 osztályú (parciális deriváltak léteznek és folytonosak). Bármely a $\in$D(f)-ben a függvény úgy viselkedik lokálisan, ahogyan az $f'(a)$: $\mathbf{R}^p\to\mathbf{R}^q$ lineáris függvény (globálisan).

1. Tétel:

Ha az $f'(a) \in \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ függvény lineáris leképezés injektív, ($\Rightarrow$ $p \leq q$) akkor f az a pontban lokálisan injektív.

Vagyis van az a-nak olyan U zárt környezte, amin az f injektív, továbbá az f-nek U-ra való leszűkítése, $f|_U$ zárt leképezés, és így homomorfizmus az U és V=f(U) zárt halmazok között. (Ha p<q, akkor az f(U)-nak nincsen belső pontja, ezért az $f|_U$ inverzének differenciálhatóságáról nem beszélünk.)

2. Tétel: (bizonyítása a Schipp-könyvben)

Ha az $f'(a) \in \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ lineáris leképezés szürjektív ($\Rightarrow p \geq q$) akkor f az a-ban lokálisan szürjektív, vagyis van az a-nak olyan U nyílt környezete, hogy az f(U) az f(a)-nak nyílt környezete, továbbá az $f|_U$ függvény nyílt leképezés(vagyis nyílt halmazt nyílt halmazba képez le).

3. Tétel: inverz függvény tétel

Ha az $f'(a)$: $\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ lineris leképezés bijektív, vagyis $\Rightarrow$ (p=q) akkor az f függvény az a-ban lokális az C^1- bijektív, vagyis van az a-nak olyan U nyílt környezete, hogy az $f|_U$ függvénynek a V=f(U) nyílt halmazon van g:V→U C^1- osztályú inverze.

$$\left.\begin{aligned} f(g(y)) &= y \\ g(f(x)) &= x \end{aligned}\right\} \text{ez az inverz}$$

g'(y)= $\left[f'(g(y))\right]^{-1}$ minden $y \in V - \text{re}$

Feladat

Határozza meg a követkövetkező függvények inverz függvényét!

f:$\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f(x_1, x_2) = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \operatorname{arctg}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right)$$

f inverze:

g:$\mathbf{R}^+ \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$

$$g(y_1, y_2) = (y_1 \bullet \cos(y_2), y_1 \bullet \sin(y_2))$$

Feladat

Az első síknegyed polárkoordinátázása

Határozza meg a következő függvény inverz függvényét! Az első térnyolcad henger-koordinátázása.

f:$\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$f(x_1,x_2,x_3)=\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2},\operatorname{arctg}\left(\frac{x_1}{x_2}\right),x_3\right)$$

Az f inverze: g: $R^+\times\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\times R^+\rightarrow R^+\times R^+\times R^+$

$$g(y_1,y_2,y_3)=(y_1\bullet\cos(y_2),y_1\bullet\sin(y_2),y_3)$$

Feladat

Határozza meg a következő függvény inverz függvényét! Az első térnyolcad polár-koordinátázása.

$$f: R^+\times R^+\times R^+\rightarrow R^+\times\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\times\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\sin(x_3)\cos(x_2),x_1\sin(x_3)\sin(x_2),x_1\cos(x_3))$$

Az f inverze: $g(y_1,y_2,y_3)=\left(\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2},\operatorname{arctg}\left(\frac{y_1}{y_3}\right),\arccos\left(\frac{y_3}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}\right)\right)$

Definíció:

Egy $f\in$ $\mathbf{R}^p\rightarrow\mathbf{R}^q$ C^1- osztályú függvényt regulárisnak nevezünk, ha az $f'(a)$ mátrix rangja minden $a\in D(f)$ pontban maximális.

Következmény:

Reguláris függvény bármely a $\in D(f)$; pontban vagy lokálisan injektív, vagy lokálisan szürjektív, vagy lokálisan C^1 -bijektív, attól függően, hogy p<q, p>q vagy p=q.

Megjegyzés:

Ha a C^1- osztályú $f\in$ $\mathbf{R}^p\rightarrow\mathbf{R}^q$ függvény valamelyik koordinátafüggvényének az $a\in D(f)$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor az f az a-ban nem lehet lokális ráképzés, ezért r($f'(a)$)<q vagyis az $f_1'(a),f_2'(a),.........,f_q'(a)$ p- dimenziós vektorok lineárisan összefüggők. (Például tegyük fel, hogy az a-ban lokális minimuma van, akkor $y<f_1(a)$ esetén az $(y,f_1(a),f_2(a),.........,f_q(a))\notin f(U)$.)

Lagrange-féle multiplikátor-módszer

Legyen $U\subset\mathbb{R}^p$ nyílt halmaz,

$f:U\rightarrow\mathbf{R}$, $(g_1,g_2,........,g_q)=g:U\rightarrow\mathbb{R}^q$, f és $g\in C^1(U)$.

Tekintsük a $H:=g^{-1}(\{0\})=\{x\in U|g(x)=0\}=\{x\in U|g_1(x),g_2(x),.........,g_q(x)=0\}\subset U$ zárt halmazt. Legyen $a\in H$ olyan, melyre $g_1'(a),g_2'(a),.........,g_q'(a)$ lineárisan függetlenek $\Leftrightarrow$ $g'(a)$ $q\times p-s$ mátrix rangja q($\leq$p).

Tegyük fel, hogy az f:U$\rightarrow\mathbb{R}$ függvénynek az a $\in H$ pontban feltételes lokális minimuma van, azaz van az a-nak olyan V környezete, hogy $x\in H\cap V$ esetén f(x)$\geq$f(a).

Tétel:
$\exists!\ \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_q \in \mathbf{R}$, hogy $f'(a) = \lambda_1 g_1'(a) + \lambda_2 g_2'(a) + ... + \lambda_q g_q'(a)$
($\Leftrightarrow$ $f'(a), g_1'(a), g_2'(a), ..., g_q'(a)$ (q+1)db p-dimenziós vektor lineárisan összefüggő vektorrendszert alkot.)

10. előadás

Bizonyítás:
Maga a $\{g_i'(a)\}$ független rendszer volt, de kiegészítve $f'(a)$-val már összefüggő rendszert kapunk. Legyen $h:U \to \mathbb{R}^{q+1}$, $u(x)=(f(x), g_1(x),.....,g_q(x)) = (f(x), g(x))$ segédfüggvény
f, g C^1osztályú $\to$ h is C^1- osztályú, elegendő megmutatni, hogy $h'(a)$ rangja (maximálisan független vektorok száma) kisebb, mint (q+1).
Indirekt tegyük fel, hogy $h'(a)$ rangja (q+1).
Ha $x \in V \cap U$ esetén $f(x) \geq f(a)$ akkor ez feltételes lokális minimumot jelent, így a $h'(a) = (f(a), g(a)) = (f(a), 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q$ vektor nem lehet a h(V) (a V halmaz képe a h leképezés esetén) halmaznak belső pontja.
A h(V) átvisz olyan pontokat is, amik $\notin H \cap V$-nek. Ha f-nek lokális minimuma van, akkor h(a) nem lehet belső pontja a $H \cap V$-nek. Vagyis (f(a),0) környezetének létezik (y,0) pontja $\Leftrightarrow$ $\exists x \in V$, h(x)=(f(x),g(x))=(y,0) erre tljesül, hogy

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = y < f(a) \text{ illetve} \\ g(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ ez ellentmondás}.$$

$\Rightarrow x \in V \cap H \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ lokális minimuma kell, hogy leyen.
Ha a $h'(a)$ rangja (q+1) lenne / maximális/ $\Rightarrow$ $h'(a)$ szürjektív lenne $\Rightarrow h \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^{q+1}$ ami a –ban szürjektív lenne $\Leftrightarrow$ létezik U környezete a-nak, hogy h(U) nyílt, így a h(a) a h(U)-ank pontja ez pedig igaz bármely $a \in V$ pontra is!
Ha $V \subset U$ a feltételt kielégíti, akkor bármely y<f(a) esetén az $(y, 0, ..., 0) \notin h(V)$, méghozzá azért, mert az f-nek feltételes szélsőértéke van. h(a)=(f(a),0,.....,0) ennek bármely környezetében van olyan típusú pont, hogy $(y, 0, ..., 0)$ ahol y<f(a).
Ha y elég közel van az f(a)-hoz az f folytonosan differenciálható és folytonosan tart az f(a)-hoz.
$\Rightarrow y \notin h(V)$.

□

Példa:
Egységsugarú körbe írt téglalapok közül melyik a maximális területű?
T(x,y)=4xy, ahol az x,y a (0,1)-ben van.
feltétel: $x^2+y^2=1$
$g(x,y)=x^2+y^2-1$, $H=g^{-1}(\{0\}) = \{x^2+y^2-1\}$ $x,y \in \mathbb{R}^2$ (ahol $\{0\}$ nivóhalmaz a 0 teljes ősképe)
$h(x)=4xy+\lambda\ (x^2+y^2-1)$

$$\left.\begin{array}{l} \partial_1 h = 4y + 2\lambda x = 0 \\ \partial_2 h = 4x + 2\lambda y = 0 \\ x^2+y^2-1 = 0 \end{array}\right\} (x,y) \in (0,1)^2$$

Három ismeretlen, három egyenlet a multiplikátorok csak a bizonyítás során kellenek.

$$\left.\begin{aligned} &\text{I. } 4xy+2\lambda x^2=0 \\ &\text{II. } 4xy+2\lambda y^2=0 \end{aligned}\right\}+$$

$$8xy+2\lambda x^2+2\lambda y^2=0$$

$$8xy+2\lambda\left(\underbrace{x^2+y^2}_{1}\right)=0$$

$$8xy+2\lambda=0$$

$$-4xy=\lambda$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{I. } 4y-8x^2y=0 \\ &\text{II. } 4x-8xy^2=0 \end{aligned}\right\}\begin{aligned} &\Rightarrow 1-2x^2=0 \\ &\Rightarrow 1-4y^2=0 \end{aligned}$$

Két egyenlet két ismeretlen (x,y)

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} &2x^2=1 \ \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \\ &2y^2=1 \ \Rightarrow y^2=\frac{1}{2} \end{aligned}\right\}\Rightarrow x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ az (x,y)=(0,0)- kizárjuk, hasonlóan a $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$-t,

hiszen itt ……… vannak ez egy lokális maximum hely. $\Rightarrow T=4xy=4\times\frac{1}{2}=2$ a maximumot a határon is meg kell nézni a szélsőértéket, zárt halmazon a Weierstrass tétel miatt globális is. (Hiszen $0\neq x,y$ és ha y=1 lenne $\Rightarrow$x=0 lenne.)

Példa: $f\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

$$f(x_1,x_2)=(R\bullet\sin x_2\bullet\cos x_1,\ R\bullet\sin x_1\bullet\cos x_2,\ R\bullet\cos x_2)$$

$$f'(x)=f'(x_1,x_2)=\begin{pmatrix} -R\bullet\sin x_2\bullet\sin x_1 & R\bullet\cos x_1\bullet\cos x_2 \\ R\bullet\sin x_2\bullet\cos x_1 & R\bullet\sin x_1\bullet\cos x_2 \\ 0 & -R\bullet\cos x_2 \end{pmatrix}$$

f(a)=(0,0,R) Minek a képe ez?

$x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=0$ esetén a koordinátái $\left(\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$

Mi lesz a mátrix rangja abban a pontban?

$$f'(a)=f'\left(\frac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ennek a rangja 1 .

Keressünk olyan pontokat melyeknek a rangja 2!

a=$\left(\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{4}\right)$ esetén f(a)=$\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$

$$f'(a)=\begin{pmatrix} -\frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ \frac{R}{2} & \frac{R}{2} \\ 0 & \frac{R}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ a rangja 2 vagyis maximális rangú $\Rightarrow$ f az a pontban lokálisan injektív

11. előadás

Példa: Archimédeszi spirális

$f:[0\ ,2n\pi]\to\mathbb{R}^2 \quad n=1,2\ldots\ldots$

$$f'(x)=\begin{pmatrix}-e^{-x}\cos x & -e^{-x}\sin x\\ -e^{-x}\sin x & e^{-x}\cos x\end{pmatrix}$$

$\|f'(x)\|^2=2e^{-2x}\cos^2 x+2e^{-2x}\sin^2 x=2e^{-2x}\Rightarrow\|f'(x)\|=\sqrt{2}e^{-x}$ (folytonosan differenciálhatónak kell lennie az útnak.)

Ívhossz: $\Gamma\subset\mathbb{R}^q$ sima görbe, vesszük a görbének egy $\varphi=(\varphi_1,\ldots\ldots\ldots,\varphi_n)$ paraméterezését, ami azt jelenti, hogy $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^q$ folytonosan differenciálható módon $s(\Gamma)=\int\limits_\alpha^\beta\|f'(t)\|dt$

$$\int\limits_0^{2n\pi}\sqrt{2}e^{-x}dx=\sqrt{2}\left(1-e^{-2\pi}\right)<\sqrt{2}\,.$$

Ez egy impoprius integrál $\int\limits_0^\infty\sqrt{2}e^{-x}dx=\sqrt{2}$

Állítás: görbe az első fordulat során megtett ív hossza nagyobb lesz, mint a követő ívhosszok összege.

n=1 esetén

$$\sqrt{2}\left(1-e^{-2\pi}\right)\overset{?}{>}\sqrt{2}-\sqrt{2}\left(1-e^{-2\pi}\right)=\sqrt{2}e^{-2\pi}$$

$$\sqrt{2}-\sqrt{2}e^{-2\pi}\overset{?}{>}-\sqrt{2}+\sqrt{2}e^{-2\pi}$$

$$\sqrt{2}\overset{?}{>}2\sqrt{2}e^{-2\pi}$$

$$1>\frac{2}{e^{2\pi}}$$

Vonalintegrál

$\varphi:I\to\mathbb{R}^p$, $I=[\alpha,\beta]$ kompakt intervallum, $\varphi(\alpha)=a$ és $\varphi(\beta)=b$, $\operatorname{im}(\varphi)\subset\mathbb{R}^p$ kompakt.

$t\in I=[\alpha,\beta]$

$f\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^q$ folytonos függvény a φ görbe mentén.

$$\int\limits_\varphi f=\int\limits_I\langle f\circ\varphi,\varphi'\rangle=\int\limits_\alpha^\beta\langle f(\varphi(t)),\varphi'(t)\rangle dt$$

Példa:

$\varphi:[0\ ,\pi]\to\mathbb{R}^2$

$\varphi(t)=(R\cos t,R\sin t)$ görbe, amit esetünkben most az intervallum

a) $f(x_1,x_2)=\left(\dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2},\dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)$

számítsuk ki az $\int\limits_\varphi f$ -et

b) $f\left(x_1,x_2\right)=\left(\frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2},\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)$

a) eset

$$f(\varphi(t))=\left(\frac{R\cos t}{\left(R\cos t\right)^2+\left(R\sin t\right)^2}\ ,\ \frac{R\sin t}{\left(R\cos t\right)^2+\left(R\sin t\right)^2}\right)=\left(\frac{\cos t}{R}\ ,\ \frac{\sin t}{R}\right)$$

$$\varphi'(t)=\left(-R\sin t\ ,\ R\cos t\right)$$

$$\left\langle f(\varphi(t))\ ,\ \varphi'(t)\right\rangle=\sqrt{-R\sin t\bullet\frac{\cos t}{R}+R\cos t\bullet\frac{\sin t}{R}}=0$$

b) eset

$$f(\varphi(t))=\left(\frac{-R\sin t}{\left(R\cos t\right)^2+\left(R\sin t\right)^2}\ ,\ \frac{R\cos t}{\left(R\cos t\right)^2+\left(R\sin t\right)^2}\right)=\left(\frac{-\sin t}{R}\ ,\ \frac{\cos t}{R}\right)$$

$$\varphi'(t)=\left(-R\sin t\ ,\ R\cos t\right)$$

$$\left\langle f(\varphi(t))\ ,\ \varphi'(t)\right\rangle=\sqrt{-R\sin t\bullet\frac{-\sin t}{R}+R\cos t\bullet\frac{\cos t}{R}}=1$$

...

Becslés vonalintegrálra:

Állítás:

$\left|\int_\varphi f\right|\le M\bullet\ell(\varphi)$, $\ell(\varphi)$ a φ görbe ívhossza $M\ge\|f(x)\|$, $x\in \operatorname{Im}(\varphi)$

Bizonyítás:

$$\left|\int_\varphi f\right|=\left|\int_I\left\langle f\circ\varphi,\ \varphi'\right\rangle\right|\le\int_I\left|\left\langle f\circ\varphi,\ \varphi'\right\rangle\right|=\int_\alpha^\beta\left|\left\langle f\left(\varphi(t)\right),\ \varphi'(t)\right\rangle\right|dt\le\int_\alpha^\beta\left\|f\left(\varphi(t)\right)\right\|\bullet\left\|\varphi'(t)\right\|\le$$

$$\le\underbrace{\max\left\{\|f(x)\|:x\in \operatorname{Im}\varphi\right\}}_{M}\bullet\underbrace{\int_\alpha^\beta\|\varphi'(t)\|dt}_{\ell(\varphi)}=M\int_\alpha^\beta\sqrt{\left\langle\varphi'(t),\varphi(t)\right\rangle}dt=M\bullet\int_\alpha^\beta\sqrt{\sum_1^p\left(\varphi_k'(t)\right)^2}\,dt$$

□

Az előző példában $\ell(\varphi)$=Rπ

$\|f\|$ ha $x\in \operatorname{Im}(\varphi)$, $\|f\|=\sqrt{\frac{\sin^2 t}{R^2}+\frac{\cos^2 t}{R^2}}=\frac{1}{R}$, $\left|\int_\varphi f\right|\le\frac{1}{R}\bullet R\pi$

Definíció: primitív függvény

$f\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$ primitív függvénye az $U\subset D(f)$ nyilt halmazon az $F\in\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ függvény, ha F differenciálható az U-n és $F'(x)=f(x)\ \forall x\in U \Leftrightarrow$ ha $D_iF(x)=f_i(x)\ \ \forall x\in U$ /i=1,2,.....p/
(p darab parciális dervált, gradiens vektor)

Megjegyzés: F+c is primitív függvénye az f-nek, ahol $c(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_p)=c\in\mathbb{R}$.

Tétel: Ha F_1 és F_2 az f primitív függvényei, akkor F_1-F_2=konstans.

Bizonyítás:
$F := F_1 - F_2$, $F' := F_1' - F_2'$=f-f=0 , $a \in U$ nyílt halmazbeli pontot rögzítünk és tekintek egy $x \in U$-t, akkor $F(x)=F(a)$. Az U nyílt halmaznak vesszük egy összefüggő nyílt halmazt ahol bármely két pontot sima úttal összeköthetek, ekkor létezik olyan $\varphi : [\alpha, \beta] \to U$ sima út, melyre $\varphi(\alpha) = a$ és $\varphi(\beta) = x$. $F \circ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, $[\alpha, \beta]$ korlátos és zárt halmaz.
$t \in [\alpha, \beta]$ helyeken $(F \circ \varphi')(t) = \langle F'(\varphi(t)) , \varphi'(t) \rangle = 0 \Rightarrow F \circ \varphi$ állandó $\Rightarrow$ konstans.

□

Példa:
1. $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3)=(x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2)$
$F \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $F(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3 + c$
2. $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = \left(\dfrac{x_2}{1+(x_1x_2)^2} \; , \; \dfrac{x_1}{1+(x_1x_2)^2} \right)$
$F \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x_1,x_2) = \text{arc tg } (x_1x_2)$

Tétel:
Ha az $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ függvény folytonos az $U \subset D(f)$ nyílt halmazon és létezik $F \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény primitív függvénye, akkor bármely U-ban haladó φ görbe esetén ahol $\varphi[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^p$ esetén $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$,
$\int_\varphi f = F(b) - F(a)$.

Bizonyítás:
$$\int_\varphi f = \int_I \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle = \int_\alpha^\beta \left\langle \underbrace{f(\varphi(t)}_{F'(\varphi(t))}, \varphi'(t) \right\rangle dt = \int_\alpha^\beta \langle F'(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle dt = \int_\varepsilon^\beta (F \circ \varphi)' (t)dt =$$ Newton-Leibniz formula alapján$= (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$.

□

A primitív függvény létezésének egy szükséges feltétele:
$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow D_iF = f_i$
$F''(x) = f'(x)$ $p \times q$ mátrix melynek szimmetrikusnak kell lennie $F'(x)$ szimmetrikusságából következik, hogy $D_j(D_iF)=D_i(D_jF) \Rightarrow D_jf_i=D_if_j$

12. előadás

A primitív függvény létezésének elégséges feltétele:

Ha az $f \in \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ függvény C^1- osztályú egy $U \subset D(f)$ csillagtartományon és az $f'(x)$ $p\times q$ mátrix $\forall x \in U$ esetén szimmetrikus, akkor az f-nek létezik az U-n primitív

függvénye: $F=\begin{cases} F(x) := \int\limits_{[a,x]} f \\ F(a)=0 \end{cases}$ $\varphi:[0,1] \to \mathbb{R}^p$, $\varphi(t)=a+t(x-a)$, $\varphi'(t)=(x-a)$

$[a,x]$ paraméterezése:

ha $x \neq a$ akkor $F(x)= \int\limits_{[a,x]} f = \int\limits_0^1 \langle f\left(a+t(x-a)\right., (x-a)) \rangle dt$

Ekkor igaz $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in U$.

A primitív függvény létezésének elégséges feltétele:

Ha az $f \in U \to \mathbb{R}^p$ ható függvény folytonosan differenciálható és az $f'(x)$ $p\times q$ mátrix szimmetrikus $\forall x \in U$ és U csillagtartomány, akkor az $F: U \to \mathbb{R}$, $F(x)= \int\limits_{\varphi_x} f$ függvény a f függvény primitív függvénye, ahol $\varphi_x := [0,1] \to U$, $\varphi_x(t)=a+t(x-a)$, $x \in U$, a egy csillagcentruma $\left(F(a)=0\right)$

Bizonyítás:

$$F(x)=\int\limits_{\varphi_x} f = \int\limits_0^1 \langle f\left(a+t(x-a)\right., (x-a)) \rangle dt = \int\limits_0^1 \sum_{j=1}^p f_j\left(a+t(x-a)\right)(x_j-a_j)dt$$

Kellene : $D_i F'(x) = f_i(x)$

$$D_i F(x) = \int\limits_0^1 \left(\underbrace{f_i\left(a+t(x-a)\right) + \sum_{j=1}^p D_i f_j\left(a+t(x-a)\right) \bullet t \bullet (x_j-a_j)}_{g'(t)} \right) dt = \int\limits_0^1 g'(t)dt = g(1)-g(0) = f_i(x) - 0.$$

Bevezettünk egy $g(t) = t \bullet f_i\left(a+t(x-a)\right)$, $t \in [0,1]$ függvényt.

□

Példa: Shipp könyv 158. oldal 3/d

$f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1, x_2^2, -x_3^2)$

$f_1(x_1,x_2,x_3) = x_1$ $D_1f_1 = 1$, $D_1f_2 = 0$, $D_1f_3 = 0$

$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_2^2$ $D_2f_1 = 0$, $D_2f_2 = 2x_2$, $D_2f_3 = 0$

$f_3(x_1,x_2,x_3) = -x_3^2$ $D_3f_1 = 0$, $D_3f_2 = 0$, $D_3f_3 = -2x_3$

0 csillagcentrum esetén:

$$F(x) = F(x_1,x_2,x_3) = \int\limits_{\varphi_x} f = \int\limits_0^1 \langle f(tx), x \rangle dt = \int\limits_0^1 \left\langle \left(tx_1, t^2x_2^2, -t^2x_3^2\right), (x_1,x_2,x_3) \right\rangle =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(tx_1^2 + t^2x_2^2 - t^2x_3^2\right) dt = \left[\frac{t^2}{2}x_1^2 + \frac{t^3}{3}x_2^2 - \frac{t^3}{3}x_3^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^2$$

Példa: Shipp könyv 158. oldal 3/c

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1,x_2)=\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right)$$

$D_1f_2(x_1,x_2)=D_2f_1(x_1,x_2)$ Legyen a=(1,0) csillagcentrum.

$$F(x_1,x_2)=\int_{\varphi_x} f=\int\left\langle f\left(\varphi_x(t)\right),\varphi'(t)\right\rangle dt=\int_0^1\frac{1+t(x_1-1)}{\sqrt{\left(1+t(x_1-1)\right)^2+\left(tx_2\right)^2}}$$

$$F(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

„Területfüggvény" fogalma:

$f\in C\left[a,b\right]$ $f(x)\geq 0$ $x\in\left[a,b\right]$

$T:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ $T(a)=0$

$$h\bullet\min_{y\in[x,x+h]} f(y)\leq T(x+h)-T(x)\leq h\bullet\max_{y\in[x,x+h]} f(y)$$

$$\min_{y\in[x,x+h]} f(y)\leq\frac{T(x+h)-T(x)}{h}\leq\max_{y\in[x,x+h]} f(y)$$

$$\begin{matrix}T'(x_+)\searrow\\ T'(x_-)\nearrow\end{matrix} f(x)\Rightarrow T'(x)=f(x)$$, azaz T a f primitív függvénye.

"Ívhossz függvény"

Az $\ell(\varphi)=\int_{[\alpha,\beta]}\|\varphi'\|$ képlet származtatása.

$\varphi:\left[\alpha,\beta\right]\to\mathbb{R}^p$, tegyük fel, hogy C^1-osztályú, tegyük fel, hogy van olyan $L_\varphi:\left[\alpha,\beta\right]\to\mathbb{R}$ úgynevezett "ívhosszfüggvény", amelynek az értéke az α-ban nulla: $L_\varphi(\alpha)=0$,

$\alpha\leq t\leq\beta$ a $\varphi(\alpha)-$tól a $\varphi(t)-$ig terjedő részének a hossza $\alpha<t<\beta$ $h>0$

$$\lim_{h\to 0}\frac{L_\varphi(t+h)-L_\varphi(t)}{\|\varphi(t+h)-\varphi(t)\|}=1$$

$$1=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{L_\varphi(t+h)-L_\varphi(t)}{h}}{\frac{\|\varphi(t+h)-\varphi(t)\|}{h}}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{L_\varphi(t+h)-L_\varphi(t)}{h}}{\left\|\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\right\|}=\begin{matrix}\nearrow\frac{L'^{+}_{\varphi}(t)}{\|\varphi'(t)\|}\searrow\\ \searrow\frac{L'^{-}_{\varphi}(t)}{\|\varphi'(t)\|}\nearrow\end{matrix}\to 1\Rightarrow$$

$L'_\varphi(t)$ létezik és egyenlő $\|\varphi'(t)\|$-vel, akkor $L_\varphi(t)=\int_\alpha^t\|\varphi'(t)\|dt=\ell(\varphi)$.

Általános felszínképlet:

$\varphi:I\to\mathbb{R}^p\in C^1$ folytonosan differenciálható reguláris leképezés (minden pontjában maximális rangú). Tegyük fel, hogy q≤p, φ a t-ben reguláris $\Rightarrow$ rangja q$\Rightarrow$ $\det\left(\varphi'(t)^*,\varphi'(t)\right)^{q\times p}$ pozitív.

Definiáljuk $(\mathrm{mod}\varphi)(t)=\sqrt{\det\left(\varphi'(t)^*,\varphi'(t)\right)}$

Ha p=q, akkor ez éppen a Jacobi – mátrix.

Tegyük fel, hogy $\varphi(I)=\psi(J)\Rightarrow \int\limits_T \operatorname{mod}\varphi\ d\lambda_q=\int\limits_J \operatorname{mod}\varphi\ d\lambda_q$.

Nevezzük a $H\subset\mathbb{R}^q$ halmazt q – dimenziós elemi sima felületnek, ha van olyan tulajdonságú $\varphi(I)$, amelyre $\varphi(I)=H$. Ekkor nevezzük $\varphi(I)$-t a H egy paraméterezésének. Ez csak a H-tól függ.

A

$$\lambda_q^p(H)=\int\limits_I \operatorname{mod}\varphi\ d\lambda_q$$

számot az $\mathbb{R}^p$ - beli **<u>q – dimenziós felület felszínének vagy térfogatának</u>** nevezzük.

q=1-re az ívhossz képletet,
q=2-r a térfogat képletet kapjuk.
Háromdimenziós esetben ha q=1, p=3, akkor felszínképletét kapjuk meg.

<u>13. előadás</u>

<u>Paraméteres integrál:</u>

$U\subset\mathbb{R}^p$ nyílt halmaz
$I=[a,b]\subset\mathbb{R}$
$f:U\times I\to\mathbb{R}\ \ \mathbb{U}\to\mathbb{R}$, $\varphi(x)=\int\limits_I f(x,t)dt$

<u>Állítás:</u>
a) Ha f folytonos, akkor φ is folytonos.
b) Ha D_if -k (i=1, 2,...........,p) léteznek és folytonosak az $U\times I$-n, akkor φ folytonosan differenciálható (U-n) és $D_i\varphi(x)=\int\limits_I D_if(x,t)dt$ i=1, 2,...........,p .

<u>a) Állítás bizonyítása:</u>
$B_r(x)\subset U$, $\overline{B_r(x)}\subset U$
Az f a $\overline{B_r(x)}\times I$ korlátos és zárt halmazon folytonos $\Rightarrow$ egyenletesen is folytonos.

Kellene: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $y\in K_r(x)\Rightarrow|\varphi(x)-\varphi(y)|<\varepsilon$
$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$: $u,v\in\overline{B_r(x)}\times I$ és $|u-v|<\delta$, $\|f(u)-f(v)\|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

Feltehetjük, hogy $0<\delta\le r$. Ebben az esetben $|f(x,t)-f(y,t)|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$, ha $\|x-y\|<\delta$, azaz $y\in B_\delta(x)$.

$$\Bigg\|\underbrace{(x,t)}_{u}-\underbrace{(y,t)}_{v}\Bigg\|=\|u-v\|=\|x-y\|<\delta$$

$$\varphi(x)-\varphi(y)=\int_a^b f(x,t)dt-\int_a^b f(y,t)dt=\int_a^b\big(f(x.t)-f(y,t)\big)dt$$

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right|=\int_a^b\left|\left(f(x.t)-f(y,t)\right)\right|dt<\int_a^b\frac{\varepsilon}{b-a}dt=\varepsilon$$

ha $y\in B_\delta(x)$, ez pontosan a folytonosság.

□

b) Állítás bizonyítása:

$$D_i\varphi(x)=\lim_{s\to0}\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s}=\lim_{s\to0}\int_a^b\frac{f(x+se_i,t)}{s}dt-\int_a^b\frac{f(x,t)}{s}dt=\lim_{s\to0}\int_a^b\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s}dt$$

Kellene: $D_i\varphi(x)=\int_a^b D_if(x,t)dt \quad i=1,2,.........,p$

$$\lim_{s\to0}\Delta S=\lim_{s\to0}\left(\underbrace{\frac{\varphi(x+se_i)-\varphi(x)}{s}-\int_a^b D_if(x,t)dt}_{\int_a^b\left(\frac{f(x+se_i,t)-f(x,t)}{s}-D_if(x,t)\right)dt}\right)=0$$

Használjuk a középérték tételt:

$g:[0,1]\to\mathbb{R} \quad g(\alpha):=f(x+\alpha\bullet se_i,t)$

$$\left.\begin{array}{l}g(1)=f(x+se_i,t)\\ g(0)=f(x,t)\end{array}\right\}\Rightarrow\underbrace{g(1)-g(0)}_{\text{középérték-tétel}}=f(x+se_i,t)-f(x,t)=g'(v)=D_i\left(f(x+v\bullet se_i,t)\right)s$$

$$\left|\Delta S\right|=\int_a^b\left(D_i\left(f(x+v\bullet se_i,t)\right)-D_i\left(f(x,t)\right)\right)dt\le\int_a^b\left|D_i\left(f(x+v\bullet se_i,t)\right)-D_i\left(f(x,t)\right)\right|dt$$

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \ u,v\in B_r(x)\times I \text{ és } \left\|u-v\right\|<\delta\Rightarrow\left|D_if(u)\text{-}D_if(v)\right|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

Kellene: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \left|s\right|<\delta\ \Rightarrow\left|\Delta s\right|<\varepsilon$. Az előző δ jó.

$$\left\|\underbrace{(x+v\bullet se_i,t)}_{u}-\underbrace{(x,t)}_{v}\right\|=\left\|(v\bullet se_i,0)\right\|=v\bullet\left|s\right|<\left|s\right|<\delta$$

$$\Rightarrow\left|D_if(u)-D_if(v)\right|=\left|D_if(x+v\bullet se_i,t)-D_if(x,t)\right|\le\frac{\varepsilon}{b-a}$$

□

...

Általános felszínképlet:

Egyszerű sima felület $H\subset\mathbb{R}^p$, ha létezik a következő tulajdonságokkal rendelkező $\varphi\in\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}^p$ C^1-osztályú leképezés:

Van olyan $I\in D(\varphi)$ korlátos és zárt q - dimenziós intervallum, amelyen φ reguláris és injektív, és teljesül a $\varphi(I)=H$ egyenlőség.

Egy ilyen (φ, I) párt a H felület egy paraméterezésének nevezzük.

Ívhossz esetén,

$\|\varphi'(t)\| = \sqrt{\left\langle \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{oszlop}}, \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{oszlop}} \right\rangle} = \sqrt{\underbrace{\left(\varphi'(t)\right)^T}_{\text{sor}} \bullet \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{oszlop}}} = \sqrt{\det\left(\left(\varphi'(t)\right)^T \bullet \varphi'(t)\right)} =: \mathrm{mod}\,\varphi(t)$, az utóbbi definíció általánosítható.

$I \subset \mathbb{R}^q$ korlátos és zárt intervallum $p \le q$

$\varphi \in \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ C^1 - osztályú

I-n φ injektív és $\mathrm{mod}\,\varphi(t) > 0$ ha $t \in I$, $\varphi(I) = H \subset \mathbb{R}^p$.

Állítás:

Ha a (φ, I) és (ψ, J) a H-nak két paraméterezése, akkor

$$\int_I \mathrm{mod}(\varphi)\lambda^q = \int_J \mathrm{mod}(\psi)\lambda^q$$

Felszín képlet:

$$\lambda_q^p(H) := \int_I \mathrm{mod}(\varphi)\lambda^q = \int_I \sqrt{\det\left(\left(\varphi'(t)\right)^T \bullet \varphi'(t)\right)}\,d\lambda^q(t).$$

Példák:

a) Gömb térfogata:

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\varphi(t_1, t_2, t_3) = \left(t_3 \bullet \sin(t_2) \bullet \cos(t_1),\ t_3 \bullet \sin(t_1) \bullet \sin(t_2),\ t_3 \bullet \cos(t_2)\right)$

$I = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, R]$

$\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} > 0$

$\mathrm{mod}(\varphi)(t) = \left| \det_{t=(t_1,t_2,t_3)} \left(\varphi'(t)\right) \right| = t_3^2 \sin(t_2)$

$$\lambda_3^3(H) = \int_T \det\left(\varphi'(t)\right) d\lambda^3(t) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^R t_3^2 \sin(t_2)\,dt_3 \right) dt_2 \right) dt_1 = \frac{4R^3\pi}{3}$$

b) Gömb felszíne

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(t_1, t_2) = \left(R\sin(t_2)\cos(t_1), R\sin(t_1)\sin(t_2), R\cos(t_2)\right)$

$H = \varphi(I) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \|x\| = R \right\}$

$\mathrm{mod}(\varphi) = R^2 \sin(t_2)$

$$\lambda_2^3(H) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} R^2 \sin(t_2)\,dt_2 \right) dt_1 = 4R^2\pi$$

c) Tórusz paraméterezése:

$\varphi(t_1, t_2, t_3) = \left(\left(a + t_3 \bullet \cos(t_2)\right) \bullet \cos(t_1),\ \left(a + t_3 \bullet \cos(t_2)\right) \bullet \sin(t_1),\ t_3 \bullet \sin(t_2)\right)$

$0 < b \leq a$

$I: 0 \leq t_1 \leq 2\pi$, $0 \leq t_2 \leq 2\pi$, $0 \leq t_3 \leq b$

$\varphi(I) = H$ a tórusz

$\mathrm{mod}(\varphi)(t_1, t_2, t_3) = a \bullet t_3 + t_3^2 \bullet \cos(t_2)$

$\lambda_3^3(H) = \int_T \mathrm{mod}(\varphi) d\lambda_3^3 = 2\pi^2 ab^2 = b^2\pi \bullet 2a\pi$

Felszíne: $\lambda_3^3(H) = 2\pi b \bullet 2\pi a$