

III. MAT. TANÁRI SZAK

Analízis Szigorlati Tételek

2007/08 I. félév

1. Halmazelméleti, logikai, kombinatorikai alapfogalmak. Logikai alapfogalmak. Az indirekt bizonyítás módszere. A teljes indukció módszere. A számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség. Bernoulli-egyenlőtlenség.

2. Valós számok. Testaxiómák, rendezési axiómák. A természetes számok és az egész számok definíciója. Arkhimedeszi axióma. Cantor-féle axióma. A tizedes tört alak. Pozitív valós szám k -adik gyöke. Felső és alsó határ létezése. Hatványozás kiterjesztése valós kitevőkre.

3. Számsorozatok határértéke. Sorozatok határértéke, konvergencia, végtelenhez tartó, oszcillálva divergáló számsorozatok. Határérték és műveletek, rendőr-elv. Nevezetes sorozatok határértékei. Monoton sorozatok. Az e szám. Rekúzióval megadott sorozatok. Bolzano-Weierstrass tétel. Cauchy-sorozat fogalma, Cauchy-kritérium.

4. Végtelen sorok. Végtelen (numerikus) sor fogalma. A geometriai sor. Cauchy-kritérium, összehasonlító kritérium. Gyökkritérium és hányadoskritérium. Abszolút konvergencia sorok. Leibniz-tétel.

5. Elemi függvények. Függvény fogalma. Injektív, szürjektív, bijektív függvények. Függvények kompozíciója, bijektív függvény inverze. Függvény grafikonja. Valós függvények. Páros, páratlan, korlátos, monoton függvények, konvex függvények. A fenti tulajdonságok grafikus értelmezése. Polinomok és racionális függvények. Exponenciális függvények, logaritmus. Trigonometrikus függvények.

6. Függvények határértéke, folytonossága. Valós függvények határértéke véges helyen. Határérték a végtelenben, végtelen határérték, féloldali határértékek. Monoton függvények féloldali határértékei. Az átviteli elv és következményei. Határérték és műveletek, kompozíciófüggvény határértéke. Folytonos függvények. Átviteli elv. Megszüntethető szakadás, első és másodfajú szakadások. Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények alaptulajdonságai: Bolzano és Weierstrass tételei.

7. Differenciálszámítás. Függvény deriváltja egy pontban. A deriváltfüggvény. Elemi függvények deriváltja. Műveleti szabályok. A láncszabály (kompozíciófüggvény deriváltja). Középértéktételek differenciálható függvényekre. L'Hospital-szabály és Taylor-formula.

8. A Differenciálszámítás alkalmazásai. A derivált előjele és lokális növekedés ill. csökkenés közötti kapcsolat. Lokális szélsőérték szükséges feltétele. Elégséges feltétel lokális szélsőértékekre az 1. és 2. derivált segítségével. Függvény konvexitása és az 1. ill. 2. derivált közötti kapcsolat. Differenciálegyenletek: lineáris és szétválasztható változójú differenciálegyenletek. Kezdetiérték-feladat.

9. Riemann-integrál. A Riemann-integrál fogalma. Darboux-féle alsó és felső integrál. Riemann-integrálhatósági kritériumok, oszcillációs összeg. Newton-Leibniz tétel, parciális és helyettesítéssel integrálás Riemann-integrálra. Formális tulajdonságok. Impropius integrál.

10. Primitív függvény. A primitív függvény fogalma, formális szabályok. Parciális és helyettesítéses integrálás. Integrálfüggvény, folytonos függvény integrálfüggvénye.

11. Függvényssorozatok és függvényssorok. Függvényssorozat és függvényssor pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Folytonosság, Riemann-integrálhatóság, differenciálhatóság öröklődése a limesz- ill. összegfüggvényre, példák. Hatványsor tulajdonságai. Taylor-sor.

12. Metrikus és normált terek. Metrikus terek alapfogalmai. Konvergens sorozatok metrikus terekben. Korlátosság, sorozatkompaktság. Teljes metrikus terek, Banach-féle fixponttétel. Az \mathbb{R}^n tér. Normált terek, norma által indukált metrika. Folytonosság és határérték metrikus terek között ható függvényekre. Weierstrass és Heine tétele metrikus terekben.

13. A többváltozós integrálszámítás elemei. Az \mathbb{R}^n -beli Jordan-mérték. Darboux-féle alsó és felső integrál. Integrálhatósági kritériumok, elemi tulajdonságok. Integrál és mérték kapcsolata. Fubini tétele. Normáltartományon vett integrál, integráltranszformáció.