Elemi matematika II.
Logika, számelmélet, kombinatorika
(Egységes érettségi feladatgyűjtemény)

Logika

57. Egy osztály 33 tanulója közül 6-ra igaz az az állítás, hogy javítóvizsgáznia kell történelemből; 5-re, hogy javítóvizsgáznia kell biológiából; 3-ra pedig az, hogy javítóvizsgáznia kell mindkét tárgyból. Hány tanulóra igaz az az állítás, hogy egyik tárgyból sem kell javítóvizsgáznia?

M. Ha az osztály létszámából levonjuk azoknak a tanulóknak a számát, akiknek történelemből kell javítóvizsgázniuk és levonjuk azoknak a tanulóknak a számát is, akiknek biológiából kell javítóvizsgázniuk, akkor azoknak a tanulóknak a számát, akiknek mindkét tárgyból pótvizsgázniuk kell, kétszer vontuk le. Tehát azoknak a tanulóknak a száma, akiknek egyik tárgyból sem kell javítóvizsgázniuk: $33 - 6 - 5 + 3 = 25$.

66. Egy papíron az alábbi 100 állítás olvasható:
1. Ezen a papíron pontosan egy állítás hamis.
2. Ezen a papíron pontosan két állítás hamis.
...
100. Ezen a papíron pontosan száz állítás hamis.
Mely állítások igazak a papíron?

M. Mivel az állítások egymásnak ellent mondanak (kizárók), csak egyikük lehet igaz. Ekkor az összes többi hamis kell legyen, ez 100-ból 99; vagyis az utolsó előtti, 99. állítás az igaz.

73. Megadunk két állítást:

1. Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlói kölcsönösen felezik egymást.
2. Ha egy négyszög átlói kölcsönösen felezik egymást, akkor a négyszög paralelogramma.
   Igaz-e, hogy
   (a) az első állítás a második megfordítása?
   (b) a második állítás az első megfordítása?
   (c) az első állítás a második tagadása?
   (d) a második állítás az első tagadása?
   (e) mindkét állítás igaz?
   (f) az egyik állítás hamis?

M. a) igaz b) igaz c) hamis d) hamis e) igaz f) hamis

93.
1. A matematikusok között a legjobb zenész és a zenészek között a legjobb matematikus vajon ugyanaz a személy-e?
2. A matematikusok között a legöregebb zenész és a zenészek között a legöregebb matematikus vajon ugyanaz-e?

M. Ha a matematikusok halmazát M-mel, a zenészek halmazát pedig Z-vel jelöljük, akkor azok a személyek, akik a matematikához is és a zenéléshez is értenek, az $M \cap Z$ halmaz elemei.

1. A matematikusok között a legjobb zenész az $M \cap Z$ halmaznak az az eleme, aki a legjobban ért a zenéléshez. A zenészek között a legjobb matematikus pedig az $M \cap Z$ halmaznak az az eleme, aki a legjobban ért a matematikához. Tehát ez a két személy nem feltétlenül azonos.
2. A matematikusok között a legöregebb zenész is és a zenészek között a legöregebb matematikus is az $M \cap Z$ halmazhoz tartozó személyek közül a legöregebb. Tehát ez a két személy ugyanaz a személy.

94. Tekintse a $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenséget.
a) Az egyenlőtlenség teljesülésének az $x\geq 0$ feltétel szükséges, elégséges, vagy szükséges és elégséges feltétele?
b) Válaszolja meg ugyanezt a kérdést $x\geq 0$ helyett $x\geq 10$ esetén!
c) Válaszolja meg ugyanezt a kérdést $x\geq 0$ helyett $x\geq 8$ esetén!

M. a) A $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenégnek az $x\geq 0$ feltétel szükséges feltétele, mert minden olyan x-re, melyre $3x+7\geq 31$, az $x\geq 0$ feltétel is teljesül.
Az $x\geq 0$ feltétel nem elégséges feltétele a $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenségnek, mert van olyan $x\geq 0$ szám, például a 2, melyre $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenség nem teljesül.

b) A $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenégnek az $x\geq 10$ feltétel elégséges feltétele, mert minden olyan x-re, melyre az $x\geq 10$ feltétel is teljesül, teljesül a $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenség is.
Az $x\geq 10$ feltétel nem szükséges feltétele a $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenségnek, mert van olyan $x<10$ szám, például a 9, melyre $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenség teljesül.

c) A $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenégnek az $x\geq 8$ feltétel szükséges és elégséges feltétele, mivel a $3x+7\geq 31$ egyenlőtlenég akkor és csak akkor teljesül, ha $x\geq 8$.

Kombinatorika

124. A rulett-tányér peremén 0-tól 36-ig sorakoznak a számok. Hány különböző elhelyezési sorrendjük lehetséges, ha két elhelyezést akkor tekintünk különbözőnek, ha legalább egyik szám legalább egyik szomszédja eltérő?

M. Ezt az elrendezést nevezik körpermutációnak. Az „igazi” permutációhoz képest itt egyrészt annyival kevesebb eset van, hogy a kör mentén egy hellyel odébb forgatva egy elrendezést nem kapunk új elhelyezést (hiszen mindenkinek mindkét szomszédja ugyanaz maradt), míg egy „hosszanti” elrendezést egy hellyel arrébb csúsztatva (és a volt utolsó elemet előre téve) nyilván más permutációt kapunk. 37 elem esetén éppen 37 különböző elforgatás lehetséges, ami mind ugyanazt az egyetlen elhelyezést jelenti. Másrészt bármely elrendezést tükrözhetjük valamely átmérőre, ez sem ad új elhelyezést, hiszen a szomszédok ugyanazok maradtak. Ezért a sorbarendezés 37! lehetőségét osztanunk kell 37-tel a forgatás és 2-vel a tükrözés miatt, így az eredmény: $\frac{37!}{37\cdot 2}=\frac{36!}{2}=1,86\cdot 10^{41}$. (Általában is igaz a példa feltételeivel, hogy n különböző elem egy kör mentén $\frac{(n-1)!}{2}$-féle sorrendben helyezhető el.)

134. Egy vasúti fülkében két ülés van egymással szemben, egyenként öt hellyel. A helyet foglaló tíz utas közül négyen menetiránnyal szemben akarnak ülni, hárman menetiránynak háttal, a többi háromnak közömbös, hogy hol ül. Hányféleképpen foglalhat helyet a tíz utas?

M. A menetiránnyal szemben $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$ -féleképpen foglalhat helyet az a négy utas, akinek ez a kívánsága. A szemközti ülésen, a menetiránynak háttal $5\cdot 4\cdot 3=60$ -féleképpen foglalhat helyet az ezt igénylő három utas. A megmaradt három helyre $3\cdot 2\cdot 1=6$ -féleképpen ülhet le a három, menetirányra „érzéketlen” utas. Az összes lehetőségek száma: $120\cdot 60\cdot 6=43200$.

147. Hányféleképpen olvasható ki a MICIMACKÓ szó a következő ábra bal felső sarkából a jobb alsóig haladva?

M	I	C	I	M	A
I	C	I	M	A	C
C	I	M	A	C	K
I	M	A	C	K	Ó

M. A MICIMACKÓ szó kiolvasásához az első betűtől az utolsóig 5 lépést kell jobbra és 3 lépést kell lefele megtenni. Ez $\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!3!}=56$ -féleképpen tehető meg.

164. A péknél kétfajta zsemle (sima, lenmagos) és négyféle kifli (sima, óriás, sajtos, lenmagos) kapható.
a) Hányféleképpen vehetek három darab péksüteményt?
b) Hányféleképpen vehetek három darab péksüteményt, ha semelyik féléből nem akarok kettőt?
c) Hányféleképpen vehetek három darab péksüteményt, ha legalább egy sajtosat és legalább egy lenmagosat mindenképpen venni akarok?

M. a) Három egymást kizáró esetre bontjuk az eseményt, így az esetszám e háromféle lehetőség számának összege lesz.

1. Minden süteményből csak egyet veszünk: $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen.
2. Az egyik fajtából kettőt veszünk. Hatféleképpen választhatom ki azt a fajtát, amiből kettő van, s ezekhez mindig ötféle a másik sütemény, azaz $6 \cdot 5 = 30$-féleképpen lesz valamelyikből kettő.
3. Egyfajtából van mind a három kiválasztott, ez 6-féleképpen tehető meg.

Azaz az összes esetek száma: $20 + 30 + 6 = 56$.

b) Ha semelyikből nem akarok egynél többet, akkor tehát a 6 péksüteményből kell 3-at kiválasztani: eset.

c) A „legalább egy sajtos" leköti, hogy a három között egy sajtos van. A maradék kettőből az egyik vagy lenmagos zsemle, vagy lenmagos kifli, tehát kétféle lehet. A harmadik bármelyik lehet a 6-ból. Ez 12 eset lenne, de ebből egyet (a lenmagos kifli és lenmagos zsemle esetét) kétszer számoltam, tehát összesen 11-féleképpen vásárolhattam.

204. Egy születésnapi bulira tízen hivatalosak (az ünnepelttel együtt). Csoki-, puncs- és dobostortát rendeltek, mindegyik 10 szeletes. Hányféleképpen lehet elosztani a három tortát, feltéve, hogy mindenki három szeletet ehet, és legalább kétfélét kap?

M. Ha mindenki mindenből egyet kap, ez éppen 1 eset. Mind a négy ember (1; 1; 1) számhármassal reprezentálható. Három darab (1; 1; 1) nem lehet, mert akkor a negyedik is az, és ez éppen az előző eset. Lehet tehát két (1; 1; 1), és a maradék valamelyik szimmetrikus pár: (1; 2; 0) és (1; 0; 2) vagy (2; 0; 1) és (0; 2; 1) vagy (0; 1; 2) és (2; 1; 0).
Akik mindháromból kapnak, 6-féleképpen választhatók ki, a maradék három párból 3-féleképpen osztható be, s a sorrendjük miatt még 2-vel szorzandó, azaz 36-féleképpen lehet.
Ha csak egy (1; 1; 1) van, ez négyféleképpen választható a vendégek közül, s a másik csak a két hármas valamelyike lehet, mivel egy szimmetrikus pár mellé mindenképpen két (1; 1; 1) kell, amelyik esetet már tárgyaltuk. Ekkor 4-féleképpen választható aki mindháromból egyet kap, a három pedig a másik 3 ember között 6-féleképpen osztható el, és két hármas van, ami egy újabb 2-es szorzó, tehát összesen 48 eset lesz.
Ha nincs (1; 1; 1), akkor két pár lehet, vagy ugyanaz kétszer, vagy két különböző.
Háromféleképpen választható ki az egy pár, és $\frac{4!}{2!2!} = 6$-féleképpen lehet ezt a 4 ember között elosztani, ami 18 eset. Ha két különböző pár van, az is 3-féleképpen választható ki háromból, és azt a négy ember között $4! = 24$-féleképpen lehet kiosztani, mert négy különböző elem. Azaz összesen $3 \cdot 24 = 72$ eset lesz. Így összesen: $1 + 36 + 48 + 72 = 157$-féleképpen ehették meg igazságosan a tortát a feltételek szerint.

207. Bizonyítsa be, hogy $\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1}$!

M. A bizonyításnál felhasználjuk: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
Ezt felhasználva: $\binom{n}{k-1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+2}{k+1} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{k+1} = \binom{n+2}{k+2}$, ami a bizonyítandó állítás volt.

208. Bizonyítsa be, hogy $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$!

M. A bizonyítandó állítás bal oldala $k\binom{n}{k}$ alakú tagok összege, ahol $k = 1, 2, \ldots, n$.
Felhasználva $\binom{n}{k}$ kiszámítási módját:

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Ennek alapján:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + n\binom{n-1}{2} + \cdots + n\binom{n-1}{n-1} =$$

$$= n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1}\right]$$

Felhasználva, hogy

$$\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-1} = 2^{n-1},$$

írhatjuk, hogy
$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1},$$
ami a bizonyítandó állítás volt.

290. Igazolja a következő egyenlőség helyességét!

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}(n\in \mathbf{N}^{+})$$

M. A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük: $n=1$-re $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$ az állítás, ez nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel, hogy az állítás valamely $n=k$-ra igaz, azaz

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Írjuk fel a bal oldali kifejezést $n=k+1$-re:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

ami az indukciós feltevés miatt
$$\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

Ezt közös nevezőre hozás, majd egyszerűsítés után $\frac{k+1}{k+2}$ alakra hozhatjuk. Tehát ha $n=k$-ra teljesül az állítás, akkor $n=k+1$-re is, és mivel $n=1$-re teljesül, ezért minden $n\in \mathbf{N}^{+}$-ra igaz.

296. Tündérország kertjében csodafa nőtt, 21 aranyalma és 24 csengő barack van rajta. Egy-egy alkalommal két gyümölcsöt szakítunk a fáról. Ha két egyformát veszünk le, akkor egy csengő barack nő helyettük, ha pedig két különbözőt, akkor egy aranyalma.
a) Utolsónak milyen gyümölcs marad a fán?
b) Összesen hány gyümölcsöt szedtünk le a fáról addig, amíg csak egy maradt rajta?

M. a) Az aranyalmák száma vagy 2-vel csökken (ha két aranyalmát szakítunk le), vagy nem változik (ha egy aranyalmát és egy csengő barackot vagy két csengő barackot szakítottunk). Kezdetben 21 aranyalma volt a fán, s ezek száma csak páros számmal változhatott, ezért az utolsónak megmaradt egy gyümölcs csak aranyalma lehetett.
b) Minden egyes szakítás során összességében eggyel csökken a fa gyümölcseinek száma, ezért 44-szer kellett szakítanunk. Összesen tehát 88 gyümölcsöt szedtünk le a fáról.

Számelmélet, oszthatóság

435. Létezik-e olyan prímszám, amely után pontosan 4 összetett szám következik a természetes számsorban?

M. Legyen p a keresett prímszám, az ezt követő négy szomszédos összetett szám a,b,c,d az ötödik, következő szám e. Erről az e-ről kellene belátni, hogy bizonyos p esetén nem összetett. (Ugyanis csak ekkor állhatna p után pontosan négy összetett szám.)
Ha $p=2$, akkor $a=3$, tehát nem összetett.
Ha $p\neq 2$, akkor páratlan, tehát az a,c,e páros, azaz összetett. Ezért nincs olyan p prímszám, amely után a természetes számsorban pontosan négy összetett szám állna.

436. Határozza meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely minden egyjegyű pozitív egész számmal osztható!

M. Vagyis az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 legkisebb közös többszörösét keressük. Felírva mindegyikük prímtényezős felbontását, az összes szereplő prímtényezőt az előforduló legmagasabb hatványon összeszorozva kapjuk: $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=2520$. Tehát ez a keresett szám.

444. Igazolja a következő állításokat számológép nélkül!
a) $9|10^{33}+8$
b) $72|10^{20}+8$
c) $6|17^8+11^8$

M. a) A szám 10-es számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege 9, ezért valóban osztható 9-cel.
b) A szám 10-es számrendszerben felírt alakjában a számjegyek összege 9, ezért 9-cel osztható, másrészt a szám 008-ra végződik, ezért 8-cal is osztható. Mivel a 8 és a 9 relatív prímek, ezért a szorzatukkal, azaz 72-vel is osztható a szám.
c)$17^8-11^8=(17-11)(17^7+17^6\cdot 11+17^5\cdot 11^2+\cdots+11^7)=6k$, ahol k egy egész szám. Ez éppen azt jelenti, hogy a szám osztható 6-tal.

485. Melyek azok az $a<b$ pozitív egészek, amelyekre teljesül, hogy $ab+a+b=114$?

M. Fejezzük ki b-t az egyenletből!

$$b(a+1)=114-ab=\frac{114-a}{a+1}=\frac{-(a+1)+115}{a+1}=-1+\frac{115}{a+1}$$

b egész, ha $a+1|115$, így ezek lehetséges értékei:

$a+1$	a	b	
1	0		nem megoldás, mert $a>0$
5	4	22	megoldás
23	22	4	nem megoldás, mert $a<b$ nem teljesül
115	114	0	nem megoldás, mert $a<b$ nem teljesül

Tehát a feladat megoldása: $a=4$, $b=22$.

495. Melyek azok a téglalapok, amelyeknek oldalai pozitív egész számok, és területük és kerületük mérőszáma ugyanaz a pozitív egész szám?

M. Az $a\cdot b=2a+2b$ egyenlet pozitív egész megoldásai a lehetséges téglalap oldalak. Könnyen ellenőrizhető, hogy 1, illetve 2 egyik oldal sem lehet, tehát $a,\ b\geq 3$.
Az egyenletből a-t kifejezve: $a=\frac{2b}{b-2}$ adódik, átalakítás után: $a=2+\frac{4}{b-2}$. Mivel a egész, ezért $b-2$ osztója 4-nek, tehát $b=3$, $b=4$ vagy $b=6$ jön szóba, így $a=6$ és $b=3$ vagy $a=b=4$ vagy $a=3$ és $b=6$ téglalapokat kapjuk, vagyis két ilyen téglalap létezik, melyek közül az egyik négyzet.