

Elemi matematika - 2007. március 20.

1. zh.: logika, számelmélet, kombinatorika
(Maus Pál)

1. - Nem tudod - kérdezte a lottóhúzás napján egy matematikus a kollégájától - milyen számokat húztak ki?
- Képzeld - felelte a kolléga - van köztük olyan szám, amelyik osztója bármely két kihúzott szám összegének.
- Melyik ez a szám?
- Ha elárulnám, kitalálnád a számokat.
- Legalább azt mondd meg, páros vagy páratlan-e ez a szám!
- ...
- Ötösöm van! - kiáltott a választ hallva a matematikus.
Milyen számokat húztak ki azon a héten?
2. k -nak mely pozitív egész értékei mellett lesz az $N = 3^{6n-1} - k \cdot 2^{3n-2} + 1$ kifejezés n minden pozitív egész értékére osztható 7-tel?
3. Igazoljuk, hogy nem létezik olyan x, y egész számpár, amelyre $15x^2 - 7y^2 = 9$.
4. Egy tepsi sült tésztát a tepsiben darabolunk fel, ennek két szélével párhuzamos, szélről szél felé haladó vágásokkal. Nevezzük a szélek mentén keletkező darabot „rossz”-nak, a többi „jó”-nak. Hány vágás esetén sikerül a süteményt úgy adagolni, hogy minden adag egy „jó” és egy „rossz” darabból álljon?
5. Egy 6×6 mezőből álló „sakktáblát” hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedtünk le. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar le. Bizonyítandó, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté.
6. Hányféleképpen tehetünk be 7 különböző személynek szóló levelet a 7 megcímezett borítékba, hogy pontosan hárman kapják meg a saját levelüket?