Geometria II., ZH - 2006. május 9.

(ifj. Böröczky Károly)

1. Bizonyítsd be, hogy bármely négyszög oldalfelező pontjai egy paralelogrammának csúcsai.

2. Bizonyítsd be, hogy tetszőleges $ABCD$ paralelogrammában

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$$

3. Adott egy $ABCD$ négyszög, melynek A-nál és C-nél fekvő szögei derékszögek. Bizonyítsd be, hogy az AB és CD oldalak AC átlóra való merőleges vetületei egyenlő hosszúak.

4. Legyen P az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontja. Bizonyítsd be, hogy

$$K(ABP\triangle) \cdot CD = K(CDP\triangle) \cdot AB$$

5. Bizonyítsd be, hogy ha $K_1, \ldots, K_n$ körök közül bármely három lefedhető egy öt sugarú körlemezzel, akkor létezik olyan öt sugarú körlemez, amely tartalmazza $K_1, \ldots, K_n$ mindegyikét.

6. Legyen E az origó közepű egységnégyzet, és legyenek $K_1, \ldots, K_n$ olyan négyzetek, melyek oldalai párhuzamosak E oldalaival. Bizonyítsd be, hogy ha $K_1, \ldots, K_n$ közül bármely három metszete tartalmazza E egy eltoltját, akkor $K_1 \cap \cdots \cap K_n$ is tartalmazza E egy eltoltját.